Prof. dr hab. Jerzy Jakubczyc
Kierownik Zakładu Zarządzania Finansami Instytut Nauk Ekonomicznych
Wydział Prawa, Administracji i Ekonomii Uniwersytet Wrocławski
https://dx.doi.org/10.65748/fiqf-2005-0030

Czy Fibonacci jest rzeczywiście odkrywcą kryterium wartości obecnej?

Wprowadzenie

Analiza wartości obecnych jest metodą służącą do wzajemnego porównywania strumieni pieniężnych z jednoczesnym uwzględnieniem upływu czasu. Za pomocą przekształceń matematycznych rozłożone w czasie wpływy i wydatki gotówkowe są przeliczane na jedną, identyczną chwilę czasu. Dzięki temu można ocenić, który strumień pieniężny jest lepszy. Kryterium wartości obecnej, nazywane też **metodą NPV**, rozwiązuje więc **problem porównywalności złożonych obiektów**, opisanych wieloma cechami. Dodajmy, że jest to jeden z ważniejszych i dotąd nierozwiązanych problemów nauki. W rozpatrywanym wypadku obiektami są strumienie pieniężne, zaś wartościami cech – kwoty pojawiające się w poszczególnych chwilach zadanego okresu czasu.

Za autora współczesnej wersji kryterium wartości obecnej przepływów pieniężnych uznaje się ekonomistę – **Irvinga Fishera**, który w 1930 r. opublikował dzieło *The Theory of Interest*. Początków można jednak doszukać się znacznie wcześniej. Najpierw przyjmowano, że na miano prekursora zasługuje francuski inżynier i ekonomista – **Jules Dupuit**, który w 1848 r. wydał pracę *On the Measurement of the Utility of Public Works*. Zajmował się projektami użyteczności publicznej, opracował metodę analizy korzyści i kosztów, a przy wskazywaniu na projekty najlepsze posługiwał się kryterium wartości obecnej.

Rychło okazało się, że kryterium wartości obecnej było znane przynajmniej 300 lat wcześniej. Z 1558 r. pochodzi bowiem praca **Jeana Trenchanta** *L'Arithmetique*, a z zamieszczonych przykładów wynika, że w Europie z XVI w. metoda zajmowała poczesne miejsce przy podejmowaniu decyzji finansowych o randze państwowej. Odkrycia dokonał i opisał **William N. Goetzman**[1]. W tym samym opracowaniu przesunął jednak historię o kolejnych 300 lat wstecz, twierdząc, że za pioniera kryterium wartości obecnej należy uznać **Leonarda z Pizy**, znanego bardziej jako **Fibonacci**.

Początek kryterium wartości obecnej sięga zatem **1202 r.**, kiedy to ukazało się pierwsze wydanie dzieła *Liber abaci*. Wydanie drugie zostało zaś opublikowane w 1228 r. Przez trzy wieki służyło w Toskanii jako podręcznik do nauki arytmetyki biznesowej w szkołach średnich, nazywanych *scuola d'abaco*. W części wstępnej pisze o tym autor tłumaczenia – **Laurence Sigler**, i można jedynie dodać, że dzieło Fibonacciego stanowiło wzorzec dla innych podręczników poświęconych zagadnieniom arytmetyki biznesowej[2].

Później dzieło Fibonacciego zostało zapomniane. Wprawdzie ponownie ukazało się w 1862 r., lecz był to przedruk manuskryptu napisanego po łacinie. Łacina była więc przeszkodą utrudniającą zapoznanie się z treścią obszernego dzieła, które obejmuje ponad 600 stron druku.

Pierwsza angielska wersja dzieła Fibonacciego ukazała się dopiero w 2002 r. i została wydana pod tytułem *Fibonacci's Liber Abaci*. Zniesienie bariery językowej sprawiło, że można było dokładniej przyjrzeć się dokonaniom Fibonacciego. Jak już wspomniano, jednym z pierwszych był W.N. Goetzman. W pracy[3] zamieścił obszerny komentarz dzieła. Stwierdził też, że to **Fibonacci** dokonał „odkrycia jednego z najważniejszych narzędzi z zakresu matematyki finansowej – narzędzia umożliwiającego jednoznaczne uporządkowanie różnych strumieni pieniężnych, opierającego się na obliczonych wartościach obecnych"[4].

Celem niniejszego opracowania jest **potwierdzenie** dokonanego odkrycia. Przede wszystkim jednak zwrócono uwagę na fakt, że Fibonacci opracował wielce intrygujący algorytm na obliczanie wartości obecnej rent pieniężnych. Zawarta w algorytmie **idea postępowania** różni się bowiem zasadniczo od stosowanej współcześnie. Co ciekawe, prowadzi do nieznanej lub zapomnianej interpretacji stopy odsetkowej. Jeśli zaś chodzi o przepływy pieniężne, pozwala na ich analizę w ujęciu rzeczywiście dynamicznym.

W opracowaniu omówiono również zakres tematyczny dzieła. Podkreślono, że sugerowana niekiedy krótka historia rozwoju nowoczesnych finansów sięga **wieku XIII**. Fibonacci prezentuje bowiem takie zagadnienia jak: wymiana walut oraz obliczanie kursów walutowych, podział zysku między akcjonariuszy, kalkulowanie stóp zwrotu z inwestycji czy też obliczanie wartości obecnych oraz przyszłych.

---

[1] W.N. Goetzman, *Fibonacci and the Financial Revolution*, Yale ICF Working Paper No. 03-28, October 23, 2003, (http://www.stern.nyu.edu/eco/seminars/FinHist/GoetzmanFibonacci.pdf), s. 33-35.

[2] Por. L.E.Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer-Verlag, New York – Berlin – Heildelberg 2003.

[3] W.N. Goetzman, *op.cit*.

[4] *Ibidem*, s. 27.

O tytule i zawartości dzieła Fibonacciego

W oryginale dzieło nosi tytuł *Liber abaci*, co w wolnym tłumaczeniu brzmi: *Książka o rachunku biznesowym*. Wersja pierwsza ukazała się w 1202 r., a wersja druga została wydana w 1228 r. Wypada przy tym przypomnieć, że dzieło dotąd najgłośniejsze, tj. *Liber quadratorum*, ukazało się w 1225 r. W nim to Fibonacci zamieścił słynny **ciąg liczbowy**, który przez matematyków jest do dzisiaj poddawany badaniom. Ciągiem tym interesują się również specjaliści od finansów. Zdaniem wielu opisuje bowiem wahania cen giełdowych ze zdumiewającą akuratnością. Wskazuje się też na ścisły związek z tzw. falami Elliota[5].

Występujące w tytule dzieła słowo *abaci* powinno kojarzyć się z drewnianym liczydłem, znanym też pod nazwą *abaco*. Warto wiedzieć, że w średniowieczu liczydło było dość powszechnie używanym narzędziem. Ugruntowywało jednak mechaniczny sposób wykonywania rachunków. Fibonacci postanowił przeciwstawić się temu, sugerując, że rachowanie w sposób mentalny przyniesie więcej pożytku. ***Abaci*** znaczy zatem ***rachować*** – ale za pomocą rozumu oraz za pomocą algorytmów nieznanych w ówczesnej Europie. Bazowały bowiem one na nowym zapisie cyfr, nazywanych w Polsce błędnie cyframi arabskimi. Tymczasem są to **cyfry hinduskie**. Arabowie natomiast docenili ich użyteczność i w sposób inteligentny połączyli z geometrią Euklidesa.

Aspekt matematyczny dzieła Fibonacciego jest wprawdzie ważny oraz interesujący, lecz specjalistę od finansów bardziej zaciekawią poruszone w dziele zagadnienia praktyczne. Im też została poświęcona znacząca część dzieła. W tym celu przyjrzyjmy się spisowi treści, który wraz z liczbami stron zamieszczono na ryc. 1.

Ryc. 1. Spis treści dzieła Fibonacciego *Liber Abaci*.

Nr.	*Tytuł rozdziału*	*Strony*
0.	Dedykacja oraz Prolog	s. 15– 16
1.	W tym miejscu zaczyna się Rozdział Pierwszy	s. 17–22
2.	O mnożeniu liczb całkowitych	s. 23–38
3.	O dodawaniu liczb całkowitych	s. 39–43
4.	O odejmowaniu liczb mniejszych od większych	s. 44–47
5.	O dzieleniu liczb całkowitych	s. 49–76
6.	O mnożeniu liczb całkowitych z ułamkami	s. 77–98
7.	O dodawaniu, odejmowaniu i dzieleniu liczb ułamkowych oraz o sprowadzaniu kilku części do jednej	s. 99–126
8.	O określaniu wartości towaru za pomocą metody głównej	s. 127–177
9.	O barterowej wymianie towarów oraz o podobnych zagadnieniach	s. 179–211
10.	O firmach oraz ich udziałowcach	s. 213–226
11.	O biciu monet	s. 227–257
12.	W tym miejscu zaczyna się Rozdział Dwunasty	s. 259–445
13.	O metodzie El-chataym oraz o tym, jak za jej pomocą można rozwiązać prawie wszystkie problemy matematyczne	s. 446 – 487
14.	O znajdowaniu pierwiastków kwadratowych i trzeciego stopnia oraz o ich mnożeniu, dzieleniu i odejmowaniu, a także o traktowaniu dwumianów i trójmianów oraz ich pierwiastków	s. 489 – 530
15.	O niezmienniczych regułach geometrycznych oraz o problemach algebry i Al-muchabala	s. 531 – 615

Źródło: L.E. Sigler, *op.cit.*

Z ryc. 1 wynika, że dzieło Fibonacciego obejmuje 600 stron druku, z czego ponad połowa dotyczy zagadnień kupieckich, monetarnych oraz bankowo-finansowych. Część główną i najbardziej obszerną stanowi **Rozdział Dwunasty**. Mieści się w nim wiele przykładów dotyczących wymiany walut, kalkulacji stóp odsetkowych oraz obliczania rent i wielkości kapitału inwestycyjnego.

[5] Por. A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998, s. 28.

Rozdział Dwunasty można by zaopatrzyć tytułem *O podstawowych problemach finansowych*. Dotyczy bowiem czterech fundamentalnych zagadnień, a mianowicie:

1) o tym, jak należy dzielić zyski, gdy udziały akcjonariuszy są zróżnicowane, a zyski są generowane w różnych okresach oraz w różnych walutach lub towarach; rozważane są też przypadki, gdy jeden z udziałowców pożycza pieniądze od innego,
2) o tym, jak obliczać zyski z wypraw kupieckich, podczas których są ponoszone bardziej lub mniej regularne wydatki,
3) o tym, jak obliczać wartości przyszłe z inwestycji podejmowanych z udziałem domów bankierskich,
4) o tym, jak przeprowadzać analizę wartości obecnej, gdy mamy do czynienia z odsetkami składanymi po okresach o zróżnicowanych długościach.

Wymienione zagadnienia są zilustrowane wieloma przykładami. Te z kolei zostały pogrupowane według przykładów wiodących, którym Fibonacci nadał łatwe do zapamiętania nazwy. Występują więc wiodące przykłady: *O drzewach*, *O znalezionym skarbie*, *O kupowaniu konia przez kilku wspólników* oraz *O wyprawie kupieckiej*.

Formuła obliczania wartości obecnej rent pieniężnych

W zagadnieniu *O wyprawie kupieckiej* Fibonacci uwzględnił szereg problemów. Dotyczą nie tylko kalkulacji zysków czy też stóp zwrotu, lecz również obliczania wielkości nakładu początkowego. Problem ostatni ilustruje treść przykładu 1.

Przykład 1. O kupcu, którego wyprawa składała się z trzech etapów.

Pewien kupiec dotarł do miasta Lucca, gdzie podwoił posiadaną kwotę pieniężną i wydał 12 denarów. Następnie udał się do Florencji, gdzie ponownie podwoił kwotę pieniędzy i wydał 12 denarów. Na koniec wrócił do Pizy, gdzie również podwoił posiadaną kwotę pieniędzy, wydał 12 denarów – i stwierdził, że nie ma już pieniędzy. Jaką kwotą dysponował kupiec przed wyruszeniem na wyprawę?

Źródło: L.E. Sigler, op.cit., s. 372.

Bez trudu zauważamy, że w przykładzie tkwi zadanie na obliczenie **wartości obecnej rent pieniężnych**. Podwajanie posiadanego kapitału oznacza, że mamy do czynienia ze stopą odsetkową równą 100%, jednak naliczaną nie po czasie, lecz względem etapów wyprawy. Etapowa renta pieniężna wynosi 12 denarów oraz wystąpiły trzy etapy. Według formuły współcześnie zalecanej, wartość obecną rent pieniężnych policzymy więc następująco:

$$\begin{aligned}PV_A(A=12; r=1.0; N=3) &= 12\times\left[\frac{(2.0)^3-1}{1.0\times(2.0)^3}\right]\\ &= 12\times\left[\frac{8-1}{1.0\times 8}\right] = 12\times[0.875]\\ &= \mathbf{10.50}\ \text{(w denarach)}\end{aligned}$$

gdzie: PV_A – wartość obecna rent pieniężnych, czyli wartość kapitału początkowego,
A – wartość renty pieniężnej, r – wielkość stopy odsetkowej, N – liczba etapów,
zaś w nawiasach kwadratowych zamieszczono wielkość czynnika wartości obecnej rent pieniężnych.
Przed wyruszeniem na wyprawę kupiec dysponował więc kwotą **10.50** denarów.

Może zadziwić fakt, że Fibonacci posłużył się **inną metodą postępowania**, które prowadzi do nader interesujących wniosków. Z wielkości stopy odsetkowej wynika, że kupiec pozyskał 2 denary przy jednym, wydanym denarze. Stosunek wyłożonego kapitału do otrzymanego wynosi zatem **1/2**. Ponieważ stało się tak trzykrotnie, to następujący iloczyn:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

określa **stosunek wyłożonego kapitału początkowego do końcowego**, pozyskanego po trzech etapach.

Ryc. 2. Kalkulacja wielkości kapitału początkowego metodą tabelaryczną.

Po etapie I	:	(1/2) x 12.00 = 6.00 (denarów)
Po etapie II	:	(1/2) x 6.00 = 3.00 (denarów)
Po etapie III	:	(1/2) x 3.00 = 1.50 (denarów)
Kapitał początkowy		Suma **10.50** (denarów)

Źródło: Opracowanie własne.

Dokonane przez Fibonacciego spostrzeżenie pozwala na przeprowadzenie obliczeń, które zamieszczono na ryc. 2. Zauważmy, że taki sam wynik otrzymano za pomocą formuły stosowanej współcześnie. Metoda tabelaryczna nie prezentuje się jednak zachęcająco, gdyż jest czasochłonna i mało poręczna.

Być może Fibonacci doszedł do podobnego wniosku i dlatego ukryty na ryc. 2 **algorytm** zapisał następująco:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\times 12+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times 12\right)+\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times 12\right)\right]\\ &=\frac{1}{2}\times 12+\frac{1}{4}\times 12+\frac{1}{8}\times 12\\ &=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\times 12=\left(\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}\right)\times 12\\ &=\left(\frac{7}{8}\right)\times 12=(0.875)\times 12=\mathbf{10.50}\ (\text{w denarach})\end{aligned}$$

Widzimy, że suma iloczynów ułamków została zastąpiona jednym, równym **7/8**. Po zamianie na ułamek dziesiętny okazuje się, że jest to wielkość czynnika wartości obecnej, którą wcześniej obliczono według formuły współczesnej. Wynik równy **0.875** niczego jednak nie sugeruje, gdy tymczasem liczby **7** oraz **8** mają określone znaczenie. System dziesiętny zapisu ułamka jest więc wygodniejszy w użyciu, lecz widać wyraźnie, że zostało to okupione **utratą cennych informacji**.

Stwierdzamy, że do identycznego wyniku Fibonacci dotarł inną drogą rozumowania, niż współcześnie uczy się studentów. Jeśli tak, to czy rozwiązanie współczesne jest lepsze?

Aby odpowiedzieć na pytanie, zaproponowany przez Fibonacciego sposób postępowania można bez większych trudności zapisać za pomocą dwóch wzorów, z których jeden dotyczy przypadku **stałej** stopy odsetkowej, a drugi – stopy **zmiennej**.

Ryc. 3. Czynniki wartości obecnej rent pieniężnych – wersja Fibonacciego oraz wersja współczesna.

Wzory wg. Fibonacciego		Wzór współczesny
$\dfrac{\sum_{n=0}^{N-1}(1+r)^n}{(1+r)^N}$	Stała stopa odsetkowa	$\dfrac{(1+r)^N-1}{r\times(1+r)^N}$
$\dfrac{\sum_{n=0}^{N-1}(1+r_n)^n}{\prod_{k=1}^{N}(1+r_k)}$	Zmienna stopa odsetkowa	Brak wzoru

Źródło: Opracowanie własne.

Oba przypadki zamieszczono na ryc. 3, gdzie uwzględniono również wzór stosowany współcześnie. Wprawdzie wersji Fibonacciego nie znajdziemy w omawianym dziele, gdyż wtedy nie znano symboli dodawania (Σ) oraz mnożenia (Π), lecz przesłanie jest jednoznacznie zrozumiałe. Podtrzymując **ułamki zwykłe** Fibonacci pragnął zachować tkwiące w nich **informacje**.

W praktyce finansowej z **ułamków zwykłych** korzysta się nader rzadko. Pamiętają o nich maklerzy giełdowi. Zdarza się bowiem, że kursy walutowe oraz ceny instrumentów pochodnych są prezentowane właśnie za pomocą ułamków zwykłych[6]. Nie bardzo jednak wiadomo, dlaczego tak się czyni. W dziele Fibonacciego znajdziemy odpowiedź, lecz jest to temat na inne opracowanie.

Powróćmy zatem do próby odpowiedzi na postawione wcześniej pytanie. Jeśli stopa odsetkowa jest **stała**, to współczesny wzór podręcznikowy jest poręczniejszy. Lecz dodajmy – jest to okupione brakiem możliwości wglądu do wyników pośrednich.

Jeśli jednak stopa odsetkowa jest **zmienna**, to współczesnej logiki rozumowania nie można uwzględnić, a zamieszczonego na ryc. 3 wzoru nie można uogólnić. Tego rodzaju problem nie występuje w wersji Fibonacciego. Wielkość czynnika można obliczyć nawet przy zmiennych stopach odsetkowych. Można również poznać zmiany czynnika po czasie.

O kryterium wartości obecnej

W dziele Fibonacciego najbardziej złożony przypadek został zamieszczony w przykładzie *O żołnierzu zarabiającym 300 bezantów rocznie*. Trzeba w nim odpowiedzieć na pytanie, czy wypłacany awansem żołd roczny na kwotę 300 bezantów jest wariantem korzystniejszym od wypłacanej co kwartał kwoty 75 bezantów.

Przykład 2. O żołnierzu zarabiającym 300 bezantów za roczną służbę.

> Za pełnioną służbę pewien żołnierz miał otrzymywać żołd po 300 bezantów rocznie, lecz na rozkaz króla był wypłacany w czterech ratach, a każda płatność wynosiła 75 bezantów. Mówimy przeto o wypłacie za trzy miesiące, którą z konieczności wypłacano łącznie. Żołnierz złożył jednak skargę, gdyż zgodził się na 300 bezantów zamiast 75 bezantów otrzymywanych przy poszczególnych wypłatach. Zażądał określonej rekompensaty liczonej od kapitału oraz zysku, która przy 100 bezantach powinna być równa 2 bezanty miesięcznie. Należy obliczyć stratę, jaką poniesie żołnierz, akceptując rozkaz króla.

Źródło: L.E. Sigler, *op.cit.*, s. 392.

Należy zwrócić uwagę, że w treści przykładu występują dwie **nieścisłości**. Fibonacci nie zaznaczył, kiedy mają być wypłacane kwoty 300 oraz 75 bezantów. Z zamieszczonej odpowiedzi wynika, że pierwszy żołd powinien być wypłacony na koniec pierwszego kwartału. Można też wywnioskować, że w wypadku kwoty 300 bezantów chodzi o wypłatę czynioną awansem.

Pomimo wymienionych nieścisłości oraz faktu, że Fibonacci nie wspomniał o znaczeniu chwili początkowej w rachunkach, wniosek ogólny nie budzi wątpliwości. Fibonacci rzeczywiście posłużył się **kryterium wartości obecnej**, aczkolwiek uczynił to bez podkreślenia istoty i wagi problemu. Nie ma zatem pewności, czy był świadom tego, co czyni. Ogłaszanie Fibonacciego jako odkrywcy kryterium wartości obecnej jest więc stwierdzeniem zanadto **naciąganym**.

Przyjmując, że podstawą obliczeń wartości obecnej ciągu wypłat kwartalnych jest **nominalna**, kwartalna stopa odsetkowa, czyli r = 3x0.02 = 0.06, to otrzymujemy następujący wynik:

$$PV_A = (A = 75; r = 0.06; N = 4) = 75 \times \left[\frac{(1.06)^4 - 1}{0.06 \times (1.06)^4} \right]$$

$$= 75 \times (3.465106)$$

$$= \mathbf{259.88} \text{ (bezantow, czyli 259 bezantow oraz 88 milsow)}$$

gdzie: PV_A – wartość obecna rent kwartalnych, A – nominalna wartość renty kwartalnej, r – nominalna, kwartalna stopa odsetkowa, N – liczba płatności rent kwartalnych w okresie rocznym.

---

[6] Por. P. Roth, *Rynki walutowe i pieniężne*, Dom Wydawniczy ABC, Warszawa 2000.

Stwierdzamy zatem, że żołnierz słusznie domagał się rekompensaty, gdyż zamiast obiecanych przez króla 300 bezantów miał otrzymywać niespełna 260 bezantów. Wynik otrzymano wprawdzie za pomocą formuły współczesnej, lecz jak się okaże – jest identyczny z rezultatem zamieszczonym w dziele Fibonacciego. Strata żołnierza opiewa więc na kwotę 40 bezantów rocznie, jeśli za podstawę przyjmiemy **początek roku**, tzn. chwilę obiecanej początkowo wypłaty na kwotę 300 bezantów.

Komentarza wymaga uwzględniona, **nominalna** stopa odsetkowa, gdy współcześnie zaleca się stosowanie stopy **efektywnej**. Fibonacci przyjął, że „ponieważ przy 100 bezantach zysk miesięczny wynosi 2 bezanty, to przy identycznej kwocie zysk trzymiesięczny wynosi 6 bezantów" (por. s. 392). Wydaje się, że popełnił kolejną **nieścisłość**. Nie bardzo wiadomo, dlaczego posłużył się oprocentowaniem prostym zamiast składanego. Czyżby w ten sposób oddzielił proces **naliczania** odsetek od procesu ich **wypłacania**, a jeśli tak – to dlaczego tak należy czynić? Na to pytanie w dziele Fibonacciego odpowiedzi nie znajdziemy.

Wpłata w wysokości 100 bezantów implikuje wypłatę po kwartale na kwotę 106 bezantów. Stosunek wyłożonego kapitału do pozyskanego wynosi zatem **100/106**. Od takiej właśnie uwagi Fibonacci rozpoczął rozwiązywanie przykładu.

Zamiast podtrzymywać system dziesiętny rachunków, odwołał się jednak do pojęć liczb pierwszych oraz ułamków prostych. Fibonacci przyjął, że 53 bezanty wynikają z kwoty 50 bezantów. Ułamek 100/106 skrócił zatem do postaci **50/53**. Z formalnego punktu widzenia jest to zrozumiałe. Nie bardzo natomiast wiadomo, jakie to ma **znaczenie oraz skutki biznesowe**.

Ponieważ w przykładzie występują **cztery płatności**, to można mówić o czterech etapach wyprawy kupieckiej. Tym samym Fibonacci odwołał się do przykładu wiodącego. Mamy zatem do czynienia z następującym iloczynem:

$$\frac{50}{53}\times\frac{50}{53}\times\frac{50}{53}\times\frac{50}{53}$$

który określa **stosunek wyłożonego kapitału do końcowego**, otrzymanego po czterech etapach wyprawy kupieckiej.

Kwotę 75 bezantów można potraktować jako wydatek ponoszony na każdym etapie. Jeśli przyjmiemy, że cała wyprawa kończy się **zerowym stanem gotówkowym**, to wielkość kapitału początkowego można obliczyć następująco:

$$\begin{aligned}
&\frac{50}{53}\times 75+\frac{50}{53}\times\left(\frac{50}{53}\times 75\right)+\frac{50}{53}\times\left[\frac{50}{53}\times\left(\frac{50}{53}\times 75\right)\right]+\frac{50}{53}\times\left\{\frac{50}{53}\times\left[\frac{50}{53}\times\left(\frac{50}{53}\times 75\right)\right]\right\}\\
&=\frac{50}{53}\times 75+\frac{2500}{2809}\times 75+\frac{125000}{148877}\times 75+\frac{6250000}{7890481}\times 75\\
&=\frac{7443850}{7890481}\times 75+\frac{7022500}{7890481}\times 75+\frac{6625000}{7890481}\times 75+\frac{6250000}{7890481}\times 75\\
&=\left(\frac{27341350}{7890481}\right)\times 75\\
&=(3.465106)\times 75=\mathbf{259.88}\ \text{(w bezantach)}
\end{aligned}$$

Wynik identyczny otrzymujemy po uwzględnieniu zamieszczonego na ryc. 3 wzoru, tzn.:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{n=0}^{3}(1+0.06)^n}{(1+0.06)^4}\times 75&=\frac{4.374616}{1.262477}\times 75\\
&=3.465106\times 75=\mathbf{259.88}\ \text{(w bezantach)}
\end{aligned}$$

Widzimy też, że oba pokrywają się z wynikiem otrzymanym na podstawie wzoru stosowanego współcześnie. Można jednocześnie dowiedzieć się, jak zachodzi proces odzyskiwania wielkości kapitału początkowego, gdyż:

$$\begin{aligned}
\mathbf{259.88}&\approx(0.792+0.840+0.890+0.943)\times 75\\
&=59.40+63.00+66.75+70.73
\end{aligned}$$

Współcześnie proces ten wyznacza się za pomocą kłopotliwego opracowywania planu spłaty pożyczki. Fibonacci odkrył zaś, że można to robić prościej i szybciej.

Zakończenie

Sięganie w przeszłość ma na celu nie tylko poznanie historii, lecz również ewentualną korektę źle obranej ścieżki rozwoju nauki lub modyfikację panujących idei. Wydaje się, że taką właśnie przesłanką należy kierować się w trakcie studiowania dzieła Fibonacciego. Nie jest aż tak ważne stwierdzenie faktu, czy rzeczywiście zasługuje na miano odkrywcy kryterium wartości obecnej. Ważniejsze jest to, że przy ocenie dokonań Fibonacciego można natrafić na rozwiązania, które w sposób wierny lub po modyfikacjach można przenieść do współczesności.

Dzieło Fibonacciego z godną podziwu konsekwencją eksploatuje jedno z pojęć fundamentalnych, którym jest **proporcjonalność**. Współcześnie zdaje się być lekceważone, a nawet bywa źle pojmowane. Tymczasem tkwi w nim nie do końca poznany potencjał i być może dlatego ujawniane, proste rozwiązania budzą zdziwienie oraz podziw.

W opracowaniu wskazano na dwa takie rozwiązania. Jednym z nich jest prosta, a zarazem pomysłowa metoda rozwiązywania problemów dotyczących **renty pieniężnej**. W czasach współczesnych nie potrafimy uporać się z finansowymi procesami dynamicznymi. Tymczasem Fibonacci wskazuje na sposób, który może dylemat ten rozstrzygnąć.

Zagadnieniem kolejnym jest pojęcie **stopy procentowej** występującej pod różnymi postaciami – stopy odsetkowej, stopy zwrotu, stopy wzrostu czy też różniczki. Chyba nie trzeba dodawać, że na ten temat napisano ogromnie wiele prac. Tym większe zdziwienie budzi więc fakt, iż Fibonacci zinterpretował stopę procentową inaczej i jednocześnie prościej.

Bez względu na formułowane wnioski dzieło Fibonacciego jest godne polecenia. Wprawdzie nie jest łatwe do przestudiowania, lecz może przynieść sporo pożytku. Zadowoli nie tylko tych, którzy interesują się historią rozwoju finansów, lecz i tych, którzy poszukują rozwiązań prostych oraz skutecznych.

Literatura

[1] Goetzman W.N., *Fibonacci and the Financial Revolution*, Yale ICF Working Paper No. 03-28, October 23, 2003, (http://www.stern.nyu.edu/eco/seminars/FinHist/GoetzmanFibonacci.pdf).

[2] Roth P., *Rynki walutowe i pieniężne*, Dom Wydawniczy ABC, Warszawa 2000.

[3] Sigler L.E., *Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer-Verlag, New York – Berlin – Heildelberg 2003.

[4] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.