

**Dr Robert Ślepaczuk**  
**Katedra Bankowości i Finansów Wydział**  
**Nauk Ekonomicznych Uniwersytet**  
**Warszawski**

**Grzegorz Zakrzewski**  
**Pion Kredytów Detalicznych Departament**  
**Ryzyka Kredytowego Polbank EFG**  
**<https://dx.doi.org/10.65748/fiqf-2007-0021>**

## **VIW20 – koncepcja indeksu zmienności dla polskiego rynku akcyjnego<sup>1</sup>**

### **1. Wprowadzenie**

Praktycznie każdy aspekt działalności na rynku finansowym związany jest z ryzykiem, najczęściej reprezentowanym przez zmienność stóp zwrotu. Koncepcja zmienności, a szczególnie prognozowanie jej przyszłych poziomów, jest wyjątkowo istotna z kilku powodów, które przedstawiamy poniżej. Odpowiednia estymacja parametru zmienności jest niezbędna w klasycznej analizie portfelowej, kiedy optymalizujemy zależność pomiędzy zyskiem, a ryzykiem, jak i w modelach rynku kapitałowego (CAPM, APT, modele wieloczynnikowe). We wszystkich modelach VaR, szacujących najbardziej prawdopodobną stratę na portfelu przy danym poziomie istotności oraz założonym typie rozkładu, zmienność jest kolejny raz najważniejszym parametrem. Kiedy analizujemy techniki wyceny opcji, parametr zmienności jest ponownie zmienną w naistotniejszy sposób wpływającą na wartość teoretyczną opcji. Nie możemy również zapominać o zmienności implikowanej, wyprowadzanej z modeli wyceny opcji, którą w praktyce handluje się na rynku opcyjnym. Na koniec, rozważając zarządzanie portfelem instrumentów pochodnych (kontrakty terminowe, opcje i swapy), należy podkreślić, że nie tylko prognozy dotyczące kierunku zmian cen, ale odpowiednia prognoza przyszłych poziomów zmienności jest nawet istotniejsza w procesie zarządzania ryzykiem.

Bogata literatura dotycząca zmienności prezentuje kilka podstawowych podejść do tematu kwantyfikacji ryzyka zmienności oraz estymatorów wykorzystywanych do szacowania jej poziomu. Opisując pojęcie zmienności rynkowej, wyróżniamy zmienność historyczną, implikowaną, zrealizowaną, a na koniec indeksy zmienności oparte na metodologii zaprezentowanej przez Dermana (Derman i in., 1999). Pojęcia te wraz z najświeższymi badaniami na temat zmienności dokładniej omawiamy w kolejnej części pracy.

Przykładając wagę do tematu zarządzania ryzykiem w instytucjach działających na rynku kapitałowym, postanowiliśmy zaimplementować metodologię Dermana, zastosowaną w 2003 r. do przeformułowania wzoru do obliczania indeksu VIX, do obliczenia podobnej miary na rynku polskim, tj. indeksu zmienności VIW20<sup>2</sup> kwantyfikującego oczekiwaną zmienność w okresie kolejnych 91 dni kalendarzowych, a obliczanego na podstawie notowań opcji na indeks WIG20. Konstrukcja indeksu VIW20 pozwala odzwierciedlić zmienność rynkową w danej chwili niezależnie od jej historycznych wahań, a co najważniejsze – nie potrzebujemy przeszłych danych w celu wyznaczenia tej miary<sup>3</sup>. Indeks VIW20 wykazuje ponadto silną ujemną korelację z indeksem WIG20 oraz kontraktami terminowymi na nim opartymi (FW20), co umożliwia nie tylko wykorzystanie go w modelach zarządzania ryzykiem, gdzie kluczowym problemem jest zabezpieczenie Vega, ale również implementacje instrumentów na nim opartych, szczególnie instrumentów pochodnych, do problemu

<sup>1</sup> Artykuł ten powstał przy wsparciu Fundacji na rzecz Nauki Polskiej.

<sup>2</sup> VIW20 – volatility index for WIG20 index.

<sup>3</sup> Wartość indeksu VIW20 dla danej jednostki czasu bazuje tylko i wyłącznie na danych z tego interwału czasowego.

optymalizacji portfela inwestycyjnego. Nasze badanie pozwala dokładnie przeanalizować historię zmienności od początku istnienia rynku opcyjnego na GPW w Warszawie, a dodatkowo daje podwaliny do jej odpowiedniej kwantyfikacji i prognozowania w przyszłości. W kolejnych częściach artykułu weryfikujemy skuteczność indeksu zmienności w polskich warunkach giełdowych, gdzie indeksy zmienności oraz instrumenty pochodne na nich oparte były niedostępne.

W celu odpowiedniego zrozumienia metodologii leżącej u podstaw prezentowanego indeksu postanowiliśmy dodatkowo porównać obliczony indeks VIW20 z innymi estymatorami zmienności, które poddaliśmy szczegółowej analizie we wcześniejszym artykule (Ślepaczuk i Zakrzewski, 2007), oraz z indeksem VIX. Pokazując najistotniejsze różnice pomiędzy wskazanymi miarami zmienności, następnie odnosimy się do możliwości oparcia instrumentów pochodnych na zmienność na jednym z tych estymatorów/indeksów.

Warstwa teoretyczna i empiryczna niniejszego artykułu została zaplanowana w sposób umożliwiający ustosunkowanie się do następujących tez/pytań badawczych:

- istnieje wysoka ujemna korelacja pomiędzy indeksem VIW20, a indeksem WIG20 oraz kontraktami na nim opartymi, a także dodatnia korelacja pomiędzy odpowiednimi indeksami zmienności obliczonymi dla rynku amerykańskiego i polskiego, tj. indeksem VIX i VIW20,
- ujemna korelacja nie zanika w momentach skrajnego zachowania się rynku, ale dodatkowo ulega nasileniu, w przeciwieństwie do standardowych instrumentów (np. akcje), gdzie początkowo silna ujemna zależność w momencie załamania rynkowego okazuje się być pozorna,
- wykorzystanie indeksu VIW20 przy optymalizacji portfela pozwala zwiększyć stopę zwrotu przy stabilnym poziomie ryzyka,
- zjawisko długiej pamięci w indeksach zmienności jest tym trwalsze, im dany indeks antycypujący zmienność w okresie kolejnych  $n$  dni jest policzony dla dłuższego horyzontu czasowego.

W prezentowanym artykule stawiamy ponadto tezę, że wprowadzenie na rynek giełdowy (GPW w Warszawie) standaryzowanych instrumentów pochodnych, opartych na zmienności przyczyniłoby się do szybszego rozwoju instrumentów pochodnych. Udowadniamy tę tezę w końcowej części artykułu. Umożliwiłoby to szerszej grupie uczestników rynku stosowanie zaawansowanych strategii wykorzystujących instrumenty pochodne (opcje, kontrakty terminowe, swapy), w których eksponujemy portfel na jeden rodzaj ryzyka, zabezpieczając wszystkie pozostałe, co w chwili obecnej jest niemożliwe ze względu na brak odpowiednich instrumentów do zabezpieczenia zmienności, niezależnie od kierunku ruchu cen.

Struktura niniejszego artykułu została zaplanowana w następujący sposób. Po wprowadzeniu do opisywanej tematyki w pierwszej jego części, kolejna zostanie poświęcona rozróżnieniu podejść do tematu estymacji zmienności. W dalszej kolejności prezentujemy dane finansowe wykorzystane w badaniu oraz „stylizowane fakty” na temat zmienności. Następna część artykułu zawiera szczegółowe omówienie metodologii zastosowanej do wyznaczenia indeksu VIW20 wraz z niezbędnymi korektami metodologii bazowej. Potem charakteryzujemy rozkład nowego indeksu zmienności. W dalszej części artykułu definiujemy proste strategie inwestycyjne, wzbogacone o indeks zmienności, których stopa zwrotu ulega poprawie przy jednoczesnym stabilnym poziomie ryzyka, oraz opisujemy własności prognostyczne indeksu VIW20 wynikające z faktu istnienia silnej zależności pomiędzy zachowaniem indeksów giełdowych, a ich zmiennością. W kolejnej części opisujemy przesłanki przemawiające za wprowadzeniem indeksów zmienności oraz instrumentów pochodnych na nich opartych, szczególnie na rynkach rozwijających się. Ostatnia część artykułu, podsumowując, prezentuje również wartość dodaną tej pracy.

## 2. Zmienność historyczna, implikowana a zrealizowana

Od lat 70. XX w., tj. od momentu opublikowania formuły wyceny opcji Blacka – Scholesa (Black, Scholes, 1973) i stworzenia podwalin rozwoju instrumentów pochodnych, temat zmienności jest stale testowanym zagadnieniem wśród teoretyków rynku finansowego. Obowiązującym i najczęściej spotykanym podejściem jest szacowanie zmienności przy pomocy odchylenia standardowego stóp zwrotu, zarówno przy pracy na danych dziennych, jak i danych *intraday*.

Podejście do modelowania zmienności jednak znacznie ewoluowało w ciągu ostatnich kilku dekad, wykształcając przynajmniej trzy odrębne sposoby jej szacowania:

- obliczanie estymatorów zmienności na danych *ex post*,
- parametryczne modele ekonometryczne (GARCH i ich modyfikacje, modele zmienności stochastycznej i in.),
- wyznaczanie zmienności implikowanej bezpośrednio z cen opcji kwotowanych na rynku przy pomocy jednego z modeli do wyceny opcji (np. model Blacka – Scholesa, model Hestona i in.).

Charakteryzując pierwsze podejście, obecnie obserwujemy wiele różnych estymatorów, próbujących oszacować „prawdziwą zmienność”, a jednocześnie zwiększających efektywność w porównaniu do klasycznej miary odchylenia standardowego stóp zwrotu, obliczanej na poziomie dziennym. Estymatory zmienności liczone na danych wysokiej częstotliwości dodatkowo mają za zadanie uwzględnienie obciążenia wynikającego z mikrostruktury rynku (*microstructure bias*), a także wybór najodpowiedniejszego interwału czasowego do ich szacowania<sup>4</sup>. Modele parametryczne wymagają oceny typu rozkładu, któremu podlega zmienność, w celu wyboru odpowiedniego modelu. Następnie musimy oszacować parametry modelu na danych historycznych, zanim przejdziemy do procesu prognozowania zmienności. Właśnie etap szacowania parametrów modelu może narazić proces modelowania zmienności na poważne błędy, których staramy się unikać, szacując zmienność metodami nieparametrycznymi, których przykładem jest przedstawiana metodologia dla indeksu VIW20. Podstawową wadą trzeciego podejścia jest konieczność założenia prawdziwości pewnego modelu wyceny opcji w celu oszacowania zmienności implikowanej. Niestety, brak spełnienia założeń powyższego modelu powoduje istotne błędy w powyższym oszacowaniu. Na tym podejściu oparta była metodologia wyznaczania indeksu VIX do roku 2003, ale bliżej do tego tematu odniesiemy się w pkt 4 i w aneksie.

Bezpośrednio z podejściem trzecim związana jest metodologia wyznaczania indeksów zmienności, stanowiąca podstawową część niniejszego artykułu. Jest ona oparta na pracy Dermana i in. (1999), opisującej podstawy wyceny tzw. *volatility swaps* i *variance swaps*, która stała się kamieniem milowym w rozwoju instrumentów pochodnych, opartych na zmienności. Poprzez prezentację sposobu wyceny swapów Derman i in. dali podstawy do zabezpieczenia instrumentów opartych na zmienności, co było niezbędnym warunkiem ich dalszego rozwoju.

Powyższą metodologię prezentujemy szczegółowo w kolejnej części, a poniżej podajemy formuły obliczeniowe trzech najczęściej pojawiających się w literaturze estymatorów zmienności (SD, RV i RR), które następnie w kolejnych częściach artykułu porównujemy z indeksami zmienności stanowiącymi główną część tego artykułu.

$$VAR_{\Delta}^n = \frac{1}{(N_{\Delta} * n) - 1} \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^{N_{\Delta}} (r_{i,t} - \bar{r})^2 \quad (1)$$

gdzie:

$VOL_{\Delta}^n$  – wariancja stóp zwrotu obliczona na danych intraday na podstawie notowań z ostatnich n-dni,

$r_{i,t}$  – oznacza logarytmiczną stopę zwrotu dla i-tego interwału o długości  $\Delta$  w dniu t, obliczoną w następujący sposób:

$$r_{i,t} = \log C_{i,t} - \log C_{i-1,t} \quad (2)$$

$C_{i,t}$  – oznacza cenę zamknięcia dla i-tego interwału o długości  $\Delta$  w dniu t,

<sup>4</sup> Estymatorami najczęściej pojawiającymi się w literaturze przedmiotu, których właściwości były testowane w licznych artykułach naukowych, są:

1. zmienność zrealizowana – *realized volatility* (Merton, 1980; Andersen i in. 1999a, 2000, 2001a i 2001b; Taylor i Xu, 1997 i in.),
2. zakres zmiany Parkinsona – *Parkinson's Range* (Parkinson, 1980).
3. estymator Garmana – Klasa (Garman i Klass, 1980).
4. estymator Rogers – Satchella (Rogers i Satchell, 1991).
5. estymator Yanga – Zhanga (Yang i Zhang, 1991).
6. skalowana zmienność zrealizowana i skalowany zrealizowany zakres zmiany – *scaled realized volatility* i *scaled realized range* (Martens i Dijk, 2007).

$\bar{r}$  – oznacza średnią stopę zwrotu na poziomie interwału o długości  $\Delta$  z ostatnich  $n$  dni, obliczoną według wzoru:

$$\bar{r} = \frac{1}{N_{\Delta} * n} \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^{N_{\Delta}} r_{i,t} \quad (3)$$

$N_{\Delta}$  – oznacza liczbę interwałów o długości  $\Delta$  w ciągu sesji giełdowej,

$n$  – oznacza pamięć procesu (w dniach), wykorzystaną w obliczeniach odpowiednich estymatorów i wartości średnich.

$$RV_{\Delta,t} = \sum_{i=1}^{N_{\Delta}} r_{i,t}^2 \quad (4)$$

$$RR_{\Delta,t} = \sum_{i=1}^{N_{\Delta}} \frac{(h_{i,t} - l_{i,t})^2}{4 \log 2} \quad (5)$$

gdzie:

$RV_{\Delta,t}$  – estymator zmienności zrealizowanej, obliczony na danych o długości interwału  $\Delta$  w dniu  $t$ ,

$RR_{\Delta,t}$  – estymator zrealizowanego zakresu zmiany, obliczony na danych o długości interwału  $\Delta$  w dniu  $t$ ,

$l_{i,t}$  – oznacza logarytm ceny minimalnej ( $\log L_{i,t}$ ) dla  $i$ -tego interwału o długości  $\Delta$  w dniu  $t$ ,

$h_{i,t}$  – oznacza logarytm ceny maksymalnej ( $\log H_{i,t}$ ) dla  $i$ -tego interwału o długości  $\Delta$  w dniu  $t$ .

Następnie przed porównaniem estymatory zmienności zostały zannualizowane według poniższych formuł, a zamiast wariancji policzyliśmy odchylenie standardowe:

$$annual\_std SD_{\Delta}^n = \sqrt{252 * N_{\Delta} * VAR_{\Delta}^n} \quad (6)$$

$$annual\_std RV_{\Delta}^n = \sqrt{\frac{252}{n} \sum_{t=1}^n RV_{\Delta,t}^n} \quad (7)$$

$$annual\_std RR_{\Delta}^n = \sqrt{\frac{252}{n} \sum_{t=1}^n RR_{\Delta,t}^n} \quad (8)$$

gdzie:

$annual\_std SD_{\Delta}^n$  – zannualizowana wartość SD,

$annual\_std RV_{\Delta}^n$  – zannualizowana wartość RV,

$annual\_std RR_{\Delta}^n$  – zannualizowana wartość RR.

Na podstawie rezultatów badania efektywności estymatorów zmienności<sup>5</sup> (Ślepaczuk i Zakrzewski, 2007) do dalszych porównań wybraliśmy  $\Delta=5$  i  $n=63$ , a więc:  $annual\_std RV_5^{63}$ ,  $annual\_std RR_5^{63}$ ,  $annual\_std SD_5^{63}$ . Przed przejściem do części badawczej zastanówmy się jeszcze nad konsekwencjami wyboru określonej wartości parametru  $n$  w procesie szacowania zmienności na przykładzie estymatora RV.

Wykres 2.1 pokazuje, jak istotną rolę w szacowaniu obecnej zmienności, jak i przewidywaniu jej przyszłych poziomów, odgrywa parametr  $n$  określający pamięć, na podstawie której estymator zmienności jest obliczany. W parametrze tym ścierają się dwa przeciwstawne dążenia. Im wyższa wartość  $n$ , tym dłuższa historia cenowa jest uwzględniona w procesie estymacji zmienności, co

<sup>5</sup> W badaniu zweryfikowaliśmy efektywność estymatorów przy pomocy zmodyfikowanego współczynnika efektywności. Badaniu poddaliśmy estymatory najczęściej pojawiające się w literaturze przedmiotu i prorównaliśmy je z odchyleniem standardowym stóp zwrotu stanowiącym jedną z podstawowych zmiennych w większości modeli finansowych.



badaniach wykorzystano indeks kontynuacyjny dla kontraktów terminowych, gdzie seria wygasająca była zastępowana w momencie, kiedy LOP następnej serii osiągał wyższą wartość<sup>7</sup>.

Indeks VIW20 został obliczony w trakcie notowań ciągłych: 9.00-16.30 dla kilku interwałów czasowych  $\Delta$  ( $\Delta=\{5, 10, 15, 30, 60, 120, 240, \text{dziennie}\}$ ). W artykule (części 5-6) prezentujemy jedynie wyniki dla  $\Delta=5$  i dla danych zagregowanych na poziomie dziennym.

Wszelkie obliczenia zostały przeprowadzone w programie SAS, a ewentualne dodatkowe wykresy zostały sporządzone w programie MetaStock lub Excel.

Zanim przejdziemy do właściwej części badania dotyczącego mierzenia zmienności, spróbujmy spojrzeć na wnioski i obserwacje (zebrane z licznych badań), które na stałe zostały ugruntowane wśród teoretyków i praktyków zajmujących się tą materią:

- Szeregi zmienności podlegają procesowi powracania do średniej (*mean reverting process*). Bardzo interesująca charakterystyka rozkładu, która dodatkowo w przypadku szeregów zmienności przybiera formę procesu powracania do minimum (*minimum reverting process*).
- Zjawisko długiej pamięci w szeregach zmienności (*long memory process*). Po negatywnym lub pozytywnym szoku w szeregu zmienności szok ten wygasa bardzo powoli (*fractionally integrated time series*, Baillie i in., 1996).
- Zjawisko grupowania zmienności (*volatility clustering*). Obserwujemy wyraźne okresy, w których zmienność pozostaje na wyższym lub niższym poziomie przez dłuższy czas. Jest to efekt silnie powiązany ze zjawiskiem długiej pamięci, opisanym w poprzednim punkcie.
- *The leverage effect* obrazujący niesymetryczną reakcję zmienności na szoki w indeksie bazowym, tj. gwałtowny wzrost zmienności w momentach silnych korekt spadkowych w przeciwieństwie do umiarkowanego wzrostu lub braku zmiany w przypadku silnych szoków wzrostowych (Black, 1976; Ebens, 1999; Andersen i in., 2001a). Andersen i in. (2001a) dodatkowo pokazują, że efekt ten jest znacznie silniejszy na poziomie zagregowanym (indeksy rynkowe) niż dla pojedynczych akcji.
- Silna negatywna korelacja zmienności z indeksem bazowym, która dodatkowo ulega nasileniu w momentach szoków rynkowych w przeciwieństwie do normalnych instrumentów (akcje, obligacje), gdzie początkowo zidentyfikowana negatywna korelacja potrafi zupełnie zaniknąć w momentach skrajnych zachowań rynków (np. krach giełdowy).
- Rozkład zmienności (w sensie wariancji) charakteryzuje wysoka kurtoza, prawostronna skośność i brak normalności, ale logarytmy odchylenia standardowego (zmienność zrealizowana) posiadają już rozkład w przybliżeniu normalny (Giot i Laurent (2004), Andersen i in. (2001a i 2001b)).
- *Volatility-in-correlation effect* obrazujący wysoką pozytywną korelację pomiędzy zmiennościami pojedynczych akcji, tj. obserwujemy wysoką/niską korelację pomiędzy poszczególnymi akcjami, jeśli ich zmienność jest wysoka/niska i dodatkowo jeśli korelacja pomiędzy pozostałymi akcjami jest wysoka/niska. (Andersen i in., 2001a).

W dalszej części prześledzimy metodologię obliczania indeksów zmienności oraz niezbędne modyfikacje umożliwiające jej implementację na rynku polskim. W punktach 5-6 postaramy się zweryfikować opisane wnioski na przykładzie indeksów zmienności: VIW20 i VIX.

#### 4. Warstwa teoretyczna

Po przedstawieniu estymatorów zmienności najczęściej pojawiających się w literaturze przedmiotu pojawia się istotny problem związany z ich obliczeniem. Dotyczy on konieczności wyboru odpowiedniej liczby dni  $n$ , na podstawie których dany estymator jest obliczany, czyli uwzględnienia krótszej lub dłuższej historii cenowej w celu odpowiedniego oszacowania prawdziwej zmienności. Pomimo tego, że we wcześniejszym artykule podjęliśmy tę próbę (Ślepaczuk i Zakrzewski, 2007), to zastosowanie estymatora zmienności odpornego na tę niedoskonałość wydaje nam się znacznie lepszym rozwiązaniem. W tym celu zwróciliśmy się w stronę metodologii opracowanej przez

<sup>7</sup> Jest to jeden z trzech przyjętych w literaturze sposobów tworzenia wykresów kontynuacyjnych dla kontraktów terminowych, gdzie z uwagi na wygasające serie nie dysponujemy notowaniami analizowanego instrumentu dla dłuższego horyzontu czasowego i w tym celu tworzymy indeks kontynuacyjny.

Dermana i in. (1999), na podstawie której poprawiono sposób obliczania indeksu zmienności VIX<sup>8</sup>, a następnie zastosowano te same formuły przy obliczaniu indeksów zmienności na giełdach europejskich<sup>9</sup>.

Nowa koncepcja indeksu zmienności (VIX) eliminowała niedoskonałości, które pojawiły się w starej formule (VXO<sup>10</sup>), z których najłabsze były następujące założenia:

- VXO bazował jedynie na opcjach *at-the-money*, przez co nie odzwierciedlał całej płaszczyzny zmienności, gubiąc szeroko udokumentowany efekt „uśmiechu zmienności”, a dokładniej – „grymasu zmienności”.
- W starej koncepcji wyznaczano zmienność implikowaną ze wzoru Blacka – Scholesa, co bezpośrednio implikowało spełnienie założeń tej formuły, które jak wiemy, nie są spełnione.
- Ponadto VXO był wyznaczany na podstawie opcji na indeks S&P100, który to indeks nie odzwierciedla stanu szerokiego rynku w przeciwieństwie do indeksu S&P500, który jest dodatkowo benchmarkiem dla większości funduszy inwestycyjnych działających na rynku amerykańskim.

Indeks VIX naprawiał powyższe błędy poprzez zastosowanie następujących rozwiązań w nowej metodologii wyznaczania indeksu VIX:

- wykorzystano kwotowania opcji odzwierciedlających szeroką gamę cen wykonania, płaszczyznę zmienności, a nie tylko ceny opcji *at-the-money*,
- zrekonstruowano formułę pozwalającą na rezygnację ze zmienności implikowanej wyprowadzanej ze wzoru Blacka – Scholesa i wyznaczenie zmienności bezpośrednio z uśrednionych, ważonych kwotowań opcji *call* i *put* dla opcji *at-* i *out-of-the-money*. Modyfikacja ta pozwoliła uniezależnić obliczany indeks od jakiegokolwiek modelu wyceny opcji (*model-free*), co w istocie było najważniejszą zmianą,
- ponadto skorzystano z opcji na indeks S&P500, którego reprezentowalność dla odzwierciedlenia stanu szerokiego rynku w porównaniu do indeksu S&P100 jest bezsporna.

Opisane zmiany umożliwiły wprowadzenie instrumentów pochodnych na zmienność (kontrakty terminowe i opcje), które od momentu wprowadzenia na giełdzie CBOE notują gwałtowny rozwój zarówno pod względem wolumenu obrotu, jak liczby otwartych pozycji<sup>11</sup>. Podstawowa formuła do obliczenia indeksu VIX<sup>12</sup> przedstawia się następująco:

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} * Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[ \frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (10)$$

gdzie:

$$\sigma = \frac{VIX}{100} \Rightarrow VIX = \sigma * 100 \quad (11)$$

T – czas do wygaśnięcia (w latach z dokładnością do minut),

F – cena terminowa, wyznaczona na podstawie cen opcji,

K<sub>i</sub> – cena wykonania i-tej opcji *out-of-the-money*; opcji *call*, jeśli K<sub>i</sub>>F, i opcji *put*, jeśli K<sub>i</sub><F,

ΔK<sub>i</sub> – przedział pomiędzy cenami wykonania – połowa odstępu pomiędzy wyższą i niższą ceną wykonania w stosunku do K<sub>i</sub>:

<sup>8</sup> Metodologia do obliczania indeksu VIX została zmieniona w 2003 r. Do tego momentu bazowano na uśrednionej zmienności implikowanej wyprowadzanej ze wzoru Blacka – Scholesa, obliczanej tylko dla opcji *at-the-money*. Następnie zmienioną metodologię zastosowano przy obliczaniu indeksów zmienności dla pozostałych kluczowych amerykańskich indeksów giełdowych (VXN – NASDAQ, VXD – DJIA, RVX – Russell 2000).

<sup>9</sup> VDAX-NEW – indeks zmienności dla indeksu DAX30, VSMI – indeks zmienności dla indeksu SMI, VSTOXX – indeks zmienności dla indeksu Dow Jones EURO STOXX 50.

<sup>10</sup> VXO – oznacza indeks zmienności amerykańskiego rynku akcyjnego, obliczany do 2003 r. na podstawie starej metodologii.

<sup>11</sup> W 2004 r. CBOE wprowadziła kontrakty terminowe na indeks VIX, a dwa lata później – opcje na indeks VIX.

<sup>12</sup> Patrz: VIX White Paper, 2003.

- $K_0$  – cena wykonania bezpośrednio poniżej ustalonego poziomu indeksu Forward (F),  
 $R$  – wolna od ryzyka stopa procentowa,  
 $Q(K_i)$  – średkowe kwotowanie ( $0.5 * (bid + ask)$ ) dla każdej opcji z ceną wykonania  $K_i$ .

Zastosowanie oryginalnej metodologii uniemożliwiało niestety obliczenie odpowiedniego indeksu zmienności dla polskiego rynku akcyjnego z uwagi na istnienie poniższych niedoskonałości polskiego rynku opcyjnego:

- zbyt niska płynność rynku, szczególnie dla opcji z dłuższym terminem wygaśnięcia, co było szczególnie widoczne na początku i pod koniec sesji giełdowej.
- zbyt duży udział jednego dużego inwestora (*market maker*) w porównaniu do wszystkich zgłaszanych ofert kupna i sprzedaży, który wycofuje wszystkie swoje oferty w momencie gwałtownych zmian rynkowych. Powodowało to niemożliwość wyznaczenia wartości indeksu lub zbyt gwałtowne jego wahania spowodowane jedynie brakiem wystarczającej liczby ofert w procesie kalkulacji,
- zbyt mała liczba i rozpiętość terminów wygaśnięcia na rynku opcji,

które możemy podsumować jednym stwierdzeniem: **zbyt mała liczba uczestników rynku, która jest bezpośrednią przyczyną niskiej płynności, a dodatkowo kluczowa rola *market makera* w zapewnieniu „pełnego” arkusza zleceń niezbędny do ciągłego wyznaczania indeksu VIW20.** W związku z tym zastosowaliśmy szereg modyfikacji w oryginalnej formule VIX-a, które pozwoliły zastosować opisaną metodologię na gruncie polskim, jednocześnie nie zmieniając logiki leżącej u jej podstaw:

- Zakładamy pamięć procesu zależną od średniej liczby cen wykonania z aktywnymi kwotowaniami *bid-ask* dla poprzedniego dnia. Pamięć jest uaktywniana, jeśli dla danego interwału liczba kwotowanych strików różni się istotnie od wartości średniej dla dnia poprzedniego. Modyfikacja miała na celu wyeliminowanie sztucznych skoków zmienności spowodowanych jedynie wycofywaniem zleceń przez *market makera*.
- Korekta danych o outliersy. W danych rozpoznaliśmy istotne outliersy na danych 5-minutowych, które zostały wyeliminowane przed dalszym procesem obliczania indeksu.
- VIW20 obliczamy jedynie w okresie od 9.00 do 16.00, ponieważ w okresie stanowiącym część naszego okresu badawczego (październik 2003 r. – październik 2005 r.) notowania ciągle zamykały się dokładnie w tym okresie.
- Zamiana okresu bazowego oczekiwanej zmienności z 30 dni na 91 dni kalendarzowych, spowodowana dostępnością opcji wygasających jedynie w dwóch terminach.
- Brak założenia o przejściu na serię opcji wygasającą w późniejszym terminie wygaśnięcia, jeśli termin do wygaśnięcia danej opcji spada poniżej 9 dni. Założenie to przyjmowane było przy obliczaniu VIX-a w celu minimalizacji odchyień spowodowanych silną fluktuacją opcji na krótko przed wygaśnięciem. W artykule rezygnujemy z niego z dwóch powodów: podczas całego okresu badawczego dysponowaliśmy jedynie opcjami wygasającymi w dwóch terminach, także taka modyfikacja na testowanych danych nie byłaby możliwa, a po drugie wpływ opcji wygasającej na wartość VIW20 jest minimalny w tym okresie.

Skrócony opis metodologii obliczania indeksu VIW20 oraz niezbędne poprawki w porównaniu do oryginalnej metodologii opisujemy szczegółowo w aneksie A.1.

## 5. Charakterystyka rozkładu indeksu zmienności oraz porównanie do innych estymatorów zmienności

Po obliczeniu indeksu VIW20 (zgodnie z metodologią przedstawioną w aneksie) spróbujmy opisać jego właściwości, zarówno jako oddzielnej miary zmienności, jak i w porównaniu do indeksu VIX i innych estymatorów zmienności na stałe zakorzenionych w literaturze przedmiotu. Szczegółowe statystyki opisowe dla danych 5-minutowych w różnych przedziałach czasowych przedstawiamy w tabeli 5.1.

Zarówno dane w tab. 5.1, jak i wykres 5.1, pokazują dużą rozpiętość wahań zmienności w badanym okresie (obrazowaną zarówno przez odległość od minimum do maksimum, jak i wysokie odchylenie standardowe), brak normalności (testy na normalność w tabeli), niewielką kurtozę i dodatnią skośność. Analiza tab. 5.1 w podziale na podokresy sugeruje występowanie zjawiska

grupowania zmienności, a kształt wykresu 5.1, nawet w tym krótkim 4-letnim odcinku czasu, skłania nas ku przypuszczeniu, że indeks VIW20 podlega procesowi powracania do średniej. Poczynione spostrzeżenia nie odbiegają istotnie od opisanych w literaturze światowej, a przedstawionych wcześniej.

**Tab. 5.1.** Statystyki opisowe indeksu VIW20 – dane 5-minutowe.<sup>a</sup>

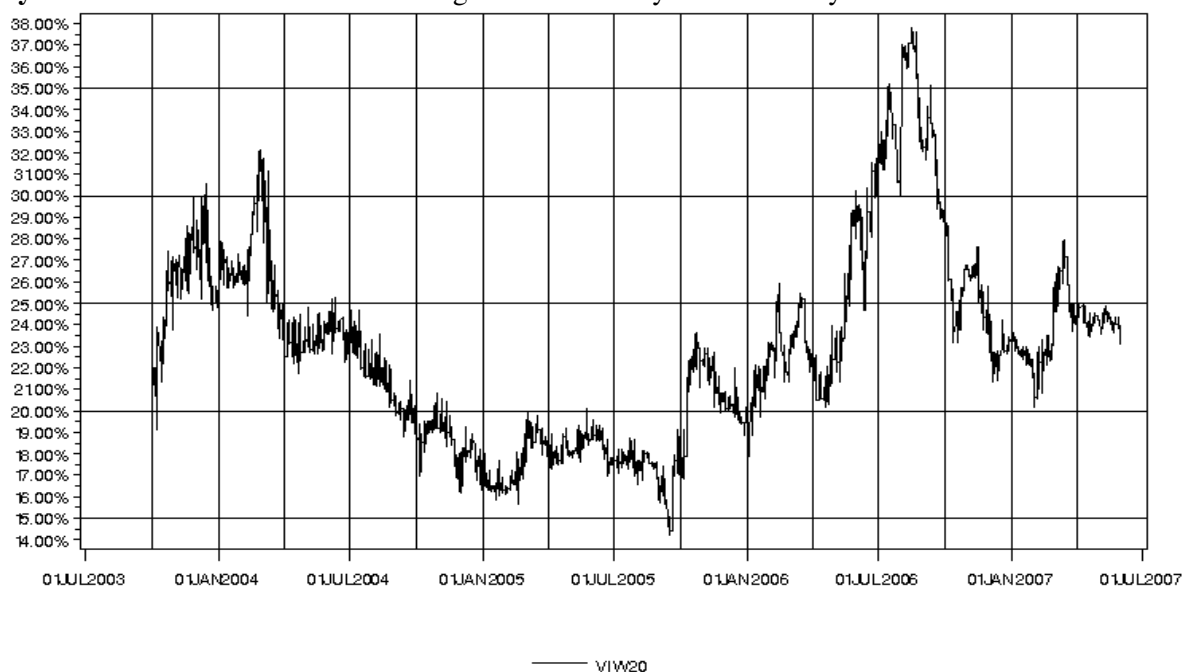
statistics	VIW20				
	1.10.2003- 31.05.2007	1.10.2003- 31.08.2004	1.09.2004- 31.07.2005	1.08.2005- 30.06.2006	1.07.2006- 31.05.2007
<b>N</b>	78024	19233	19319	19778	19694
<b>Mean</b>	0.229	0.247	0.182	0.218	0.268
<b>Median</b>	0.227	0.239	0.181	0.218	0.248
<b>Variance</b>	0.0021	0.0007	0.0001	0.0013	0.0020
<b>Std Dev</b>	0.046	0.026	0.010	0.036	0.045
<b>Minimum</b>	0.142	0.191	0.157	0.142	0.202
<b>Maximum</b>	0.378	0.322	0.214	0.319	0.378
<b>Kurtosis</b>	0.441	-0.344	-0.614	0.284	-0.425
<b>Skewness</b>	0.780	0.561	-0.045	0.550	0.927

Test for Normality						
<b>Kolmogorov-Smirnov</b>	<b>Statistic</b>	0.066691	0.124396	0.039828	0.103987	0.188568
	<b>p-value</b>	<0.0100	<0.0100	<0.0100	<0.0100	<0.0100
<b>Cramer-von Mises</b>	<b>Statistic</b>	111.061	47.72453	8.182369	44.51618	206.4707
	<b>p-value</b>	<0.0050	<0.0050	<0.0050	<0.0050	<0.0050
<b>Anderson-Darling</b>	<b>Statistic</b>	866.9136	257.6142	63.71919	284.4272	1114.794
	<b>p-value</b>	<0.0050	<0.0050	<0.0050	<0.0050	<0.0050

<sup>a</sup> Tabela zawiera podstawowe statystyki opisowe dla danych 5-minutowych: liczba obserwacji, średnia, mediana, wariancja, odchylenie standardowe, min, max, kurtoza, skośność, testy na normalność dla pełnego okresu poddanego badaniu oraz dodatkowo dla równych 11-miesięcznych przedziałów czasowych.

**Wykres 5.1.** Indeks VIW20 dla badanego okresu na danych 5 minutowych.<sup>a</sup>



<sup>a</sup> Fluktuacje wykresu VIW20 w okresie od października 2003 r. do maja 2007 r.

W celu lepszego zrozumienia właściwości indeksu VIW20 w tab. 5.2 prezentujemy porównanie statystyk opisowych dla VIW20, indeksu VIX oraz trzech estymatorów zmienności – RV, RR i SD obliczonych dla kontraktów terminowych na WIG20.

Porównanie indeksu VIW20 z innymi koncepcjami estymatorów zmienności wyznaczonymi dla tego samego okresu czasu nie uwidacznia istotnych różnic zarówno w wartości średniej, rozpiętości, wariancji estymatorów zmienności czy konsekwentnym braku normalności. Musimy jednak pamiętać o tym, że oczekiwana zmienność dla kolejnych 3 miesięcy kalendarzowych w indeksie VIW20 jest estymowana na podstawie danych z 5-minutowego interwału w danej chwili, podczas gdy w porównywanych estymatorach zmienności do obliczenia adekwatnej miary potrzebujemy kwotowań intraday z ostatnich trzech miesięcy kalendarzowych. Fakt ten uzmysławia badaczom kluczową przewagę metodologii opracowanej przez Dermana (1999) i jednocześnie skłania do dalszych prac w celu gruntowniejszego zrozumienia właściwości, a przede wszystkim szerokiej możliwości wykorzystania indeksów zmienności.

**Tab. 5.2.** Statystyki opisowe indeksu VIX, VIW20 oraz trzech estymatorów zmienności – dane dzienne.<sup>a</sup>

		VIX	VIW20	$annual\_std\ RV_{\Delta}^n$	$annual\_std\ RR_{\Delta}^n$	$annual\_std\ SD_{\Delta}^n$
N		919	915	921	921	921
Mean		0.139	0.228	0,215	0,173	0,215
Median		0.133	0.226	0,208	0,167	0,208
Variance		0.0006	0.0021	0,0034	0,0024	0,0034
Std Dev		0.024	0.046	0,058	0,049	0,058
Minimum		0.099	0.144	0,137	0,111	0,137
Maximum		0.238	0.376	0,369	0,297	0,369
Kurtosis		-0.082	0.474	-0,084	-0,260	-0,090
Skewness		0.660	0.787	0,817	0,815	0,819
P1		0.102	0.160			
P5		0.107	0.168			
P10		0.111	0.175			
P90		0.173	0.290			
P95		0.183	0.320			
P99		0.203	0.366			
<b>Test for Normality</b>						
<b>Kolmogorov-Smirnov</b>	<b>Statistic</b>	0.068806	0.090791	0.105331	0.120639	0.108036
	<b>p-value</b>	<0.0100	<0.0100	<0.0100	<0.0100	<0.0100
<b>Cramer-von Mises</b>	<b>Statistic</b>	1.284063	1.864589	3.081353	4.03119	3.102534
	<b>p-value</b>	<0.0050	<0.0050	<0.0050	<0.0050	<0.0050
<b>Anderson-Darling</b>	<b>Statistic</b>	9.994147	11.20433	22.05543	26.93477	22.29116
	<b>p-value</b>	<0.0050	<0.0050	<0.0050	<0.0050	<0.0050

<sup>a</sup> Tabela zawiera podstawowe statystyki opisowe, obliczone na danych dziennych: liczba obserwacji, średnia, mediana, wariancja, odchylenie standardowe, min, max, percentyle, kurtoza, skośność, testy na normalność dla pełnego okresu poddanego badaniu. VIW20,  $annual\_std\ RV_{\Delta}^n$ ,  $annual\_std\ RR_{\Delta}^n$ ,  $annual\_std\ SD_{\Delta}^n$  – obliczenia na danych zagregowanych na poziomie dziennym dla n=63.

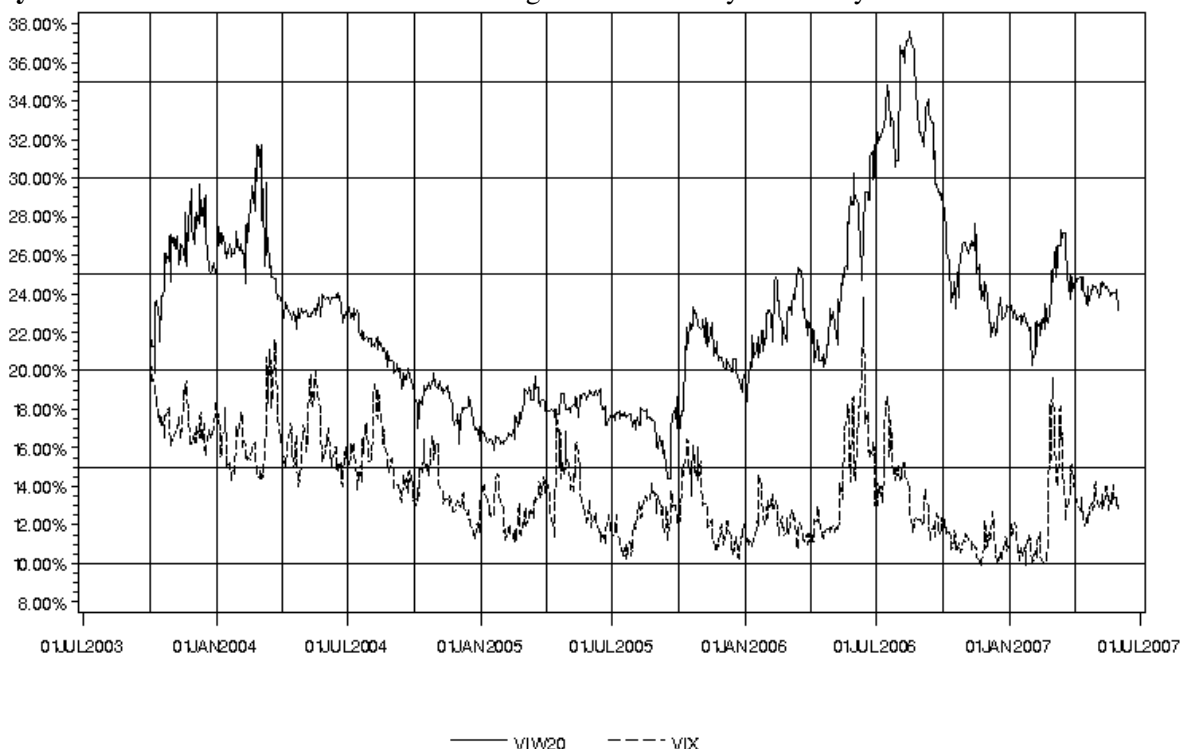
Porównanie indeksu zmienności rynku polskiego i amerykańskiego potwierdza przypuszczenie o znacznie wyższej zmienności rynku kraju rozwijającego się i dodatkowo o znacznie wyższej wariancji tej zmienności (zarówno wartości średnie, jak i minima oraz maksima znajdują się

na znacznie wyższych poziomach dla indeksu VIX). Rozkłady, podobnie jak poprzednio na danych 5-minutowych, nie są normalne dla żadnej ze zmiennych, obserwujemy dodatnią kurtozę i niewielką skośność. Znacznie ciekawsza obserwacja dotyczy odpowiednich percentyli indeksu VIW20 oraz VIX. Odległość pomiędzy P10 a MIN (0,012 dla VIX i 0,031 dla VIW20) w porównaniu do odległości pomiędzy P90, a MAX (0,065 dla VIX i 0,086 dla VIW20) oraz istotna różnica pomiędzy MEAN-MIN a MAX-MEAN (odpowiednio 0,04/0,099 dla VIX i 0,084/0,148 dla VIW20) skłania do przypuszczeń, że popularny w rozkładach zmienności proces powracania do średniej ma raczej formę procesu powracania do minimum, który zawiera dodatkowy warunek, że średnia procesu jest zbliżona do jego wartości minimalnej.

W celu lepszego zrozumienia różnic pomiędzy indeksem VIX i VIW20, ich fluktuacje zostały dodatkowo przedstawione na wykresie 5.2. Podstawową różnicą jest różny moment występowania punktów zwrotnych na prezentowanych wykresach oraz znacznie dłuższa pamięć na wykresie VIW20 w porównaniu do VIX. Przedstawione różnice mają związek z różnymi okresami, dla których obliczamy zmienność oczekiwaną w przypadku rynku polskiego i amerykańskiego (w przypadku indeksu VIW20 – 91 dni, a w przypadku indeksu VIX – 30 dni kalendarzowych).

Analiza wykresu 5.2., a szczególnie w porównaniu z wykresem 2.1., informuje nas o silnym powiązaniu zmian oraz współwystępowaniu punktów ekstremalnych dla estymatora  $_{annual\_std}RV_5^{21}$  z VIX oraz dla  $_{annual\_std}RV_5^{63}$  z VIW20. Zaobserwowana zależność, pomimo pozornych różnic, sugeruje silny związek pomiędzy miarami zmienności obliczonymi na różnych rynkach (indeks S&P500, a WIG20), a po drugie – podkreśla istotny wpływ parametru  $n$  lub w przypadku indeksów zmienności horyzontu czasowego opcji (VIX – 30dni, VIW20 – 91 dni kalendarzowych) w porównaniu do wykorzystanej formuły obliczeniowej. Nie zmienia to oczywiście konieczności posiadania znacznie dłuższych szeregów czasowych w przypadku estymatorów zmienności w porównaniu do danych niezbędnych do wyznaczenia indeksów zmienności.

**Wykres 5.2.** Indeks VIX i VIW20 dla badanego okresu na danych dziennych.<sup>a</sup>

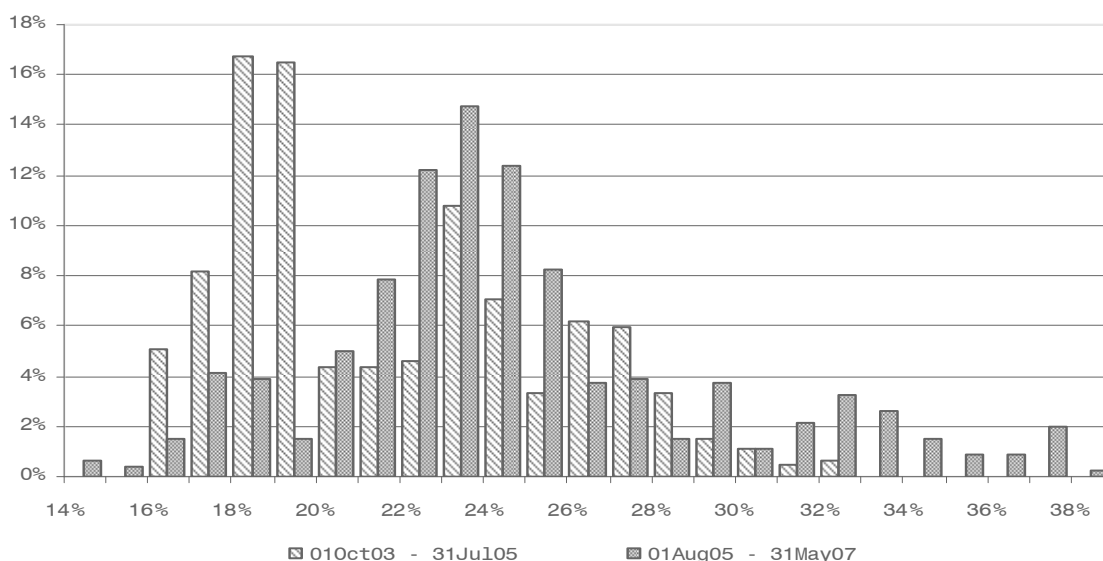


<sup>a</sup> VIW20 – zmienność oczekiwana w okresie kolejnych 91 dni, VIX – zmienność oczekiwana w okresie kolejnych 30 dni kalendarzowych.

Dodatkowe własności indeksów zmienności prezentuje wykres 5.3, obrazujący zmienność indeksu VIX w czasie. W tym przypadku, dzieląc testowany okres na wysoką i niską zmienność,

pokazuje jednocześnie przesunięcie rozkładu zmienności pomiędzy nimi, zarówno w sensie jego średniej, jak i wariancji.

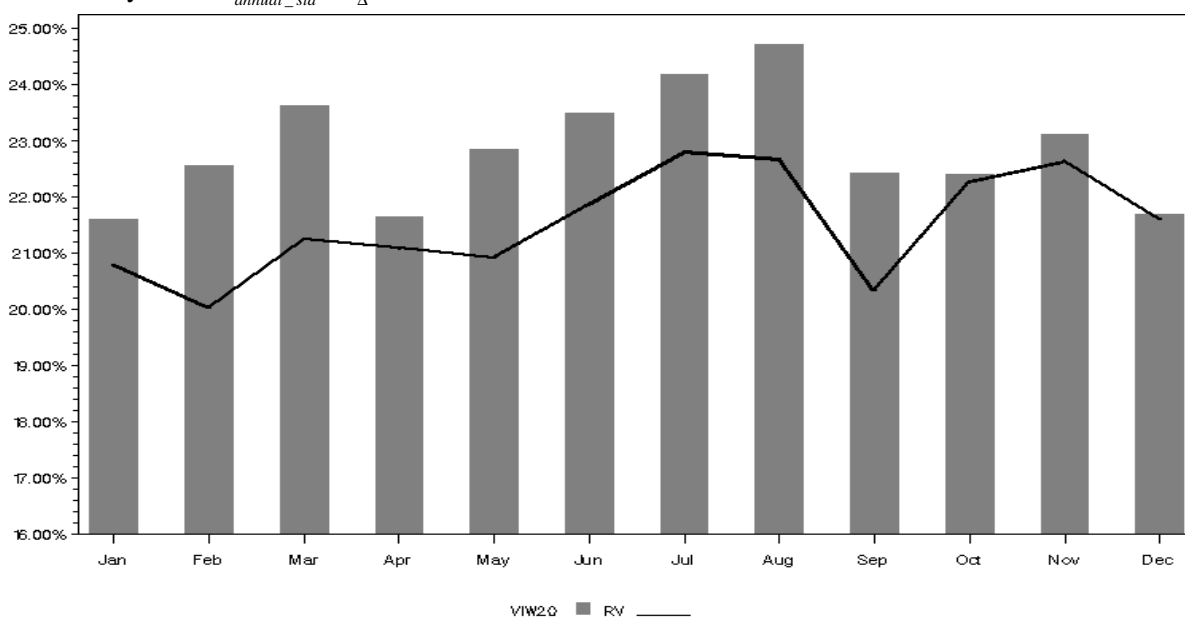
**Wykres 5.3.** Rozkład częstości dla indeksu VIW20.<sup>a</sup>



<sup>a</sup>Rozkład VIX w dwóch rozdzielnych okresach: 1 października 2003 r. – 31 lipca 2005 r. oraz 1 sierpnia 2005 r. – 31 maja 2007 r.

Kolejny wykres (5.4) miał na celu zobrazowanie miesięcznej sezonowości procesu, z miesiącami charakteryzującymi się niższą i wyższą od średniej zmiennością. Niestety, biorąc pod uwagę zbyt krótki okres testowy, uwarunkowany danymi zewnętrznymi, nie skupiamy się na konkretnych miesiącach, a jedynie sugerujemy przydatność takiej analizy w momencie, kiedy będziemy dysponowali dłuższą historią notowań.

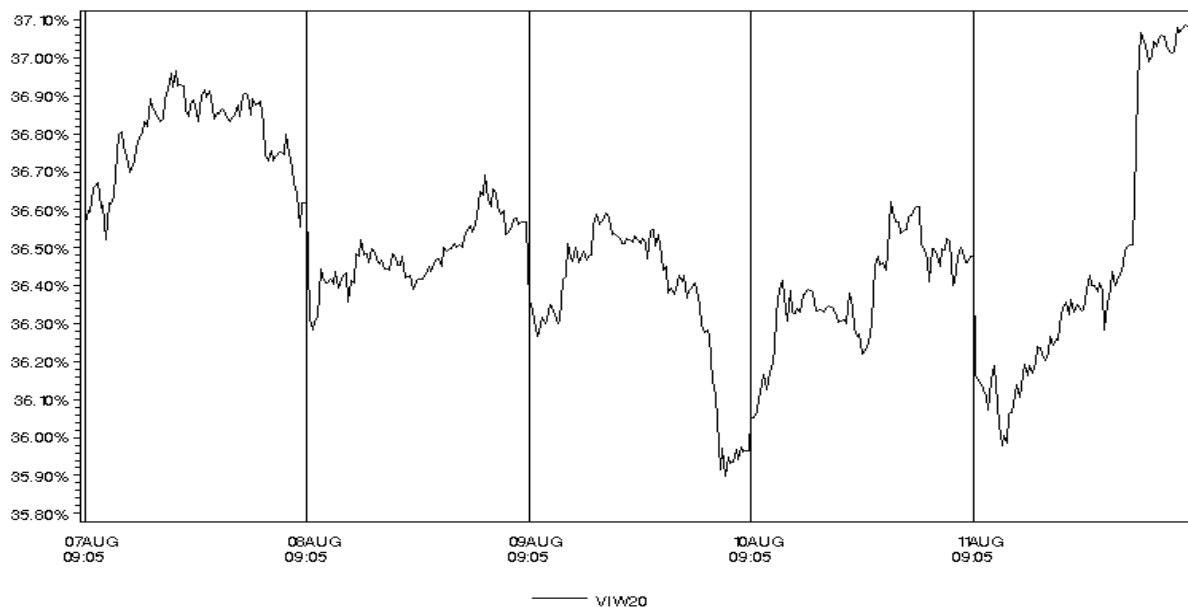
**Wykres 5.4.** Średnia miesięczna wartość indeksu VIW20 w porównaniu do średniej miesięcznej wartości estymatora  $annual\_std\ RV_{\Delta}^n$ .



<sup>a</sup> Symulacja dla okresu: 1 października 2003 r – 31 maja 2007 r. W przypadku RV obliczenia przeprowadzone dla  $\Delta = 5$  min oraz  $n = 63$ .

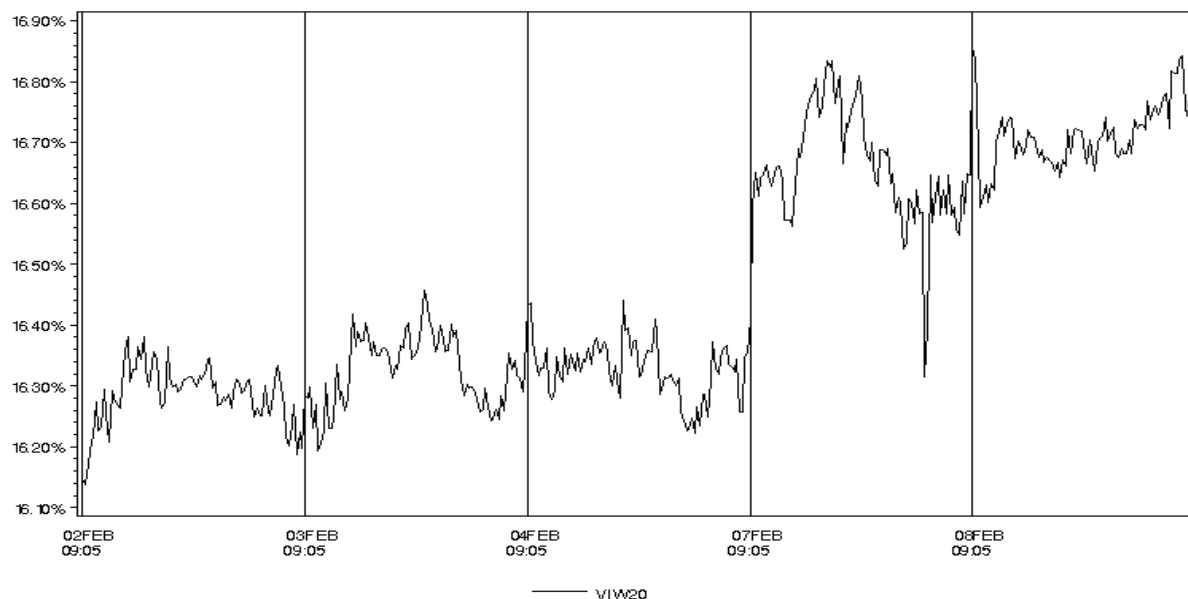
Podsumowując przedstawione własności indeksu zmienności VIW20, odziedziczył on wszystkie cechy przypisywane zmienności zrealizowanej, opisaney w trzeciej części, a dodatkowo zawiera pewne specyficzne zalety związane z koncepcją formuły obliczeniowej. Zanim przejdziemy do kolejnej części, w której poprzez konstrukcję odpowiednich strategii inwestycyjnych staramy się zobrazować kolejne własności indeksu VIW20 (np. silną ujemną korelacją z indeksami giełdowymi, zjawisko długiej pamięci oraz proces powracania do średniej), spójrzmy na przykład fluktuacji zmienności w ciągu sesji giełdowej na przykładzie tygodnia charakteryzującego się wysoką (wykres 5.5) i niską zmiennością (wykres 5.6).

**Wykres 5.5.** Indeks VIW20 na danych 5-minutowych przez kilka kolejnych dni dla okresu wysokiej zmienności.



<sup>a</sup>Fluktuacje zmienności intraday w okresie 7-11 sierpnia 2006 r., obrazujące tydzień wysokiej zmienności.

**Wykre 5.6.** Indeks VIW20 na danych 5-minutowych przez kilka kolejnych dni dla okresu niskiej zmienności.



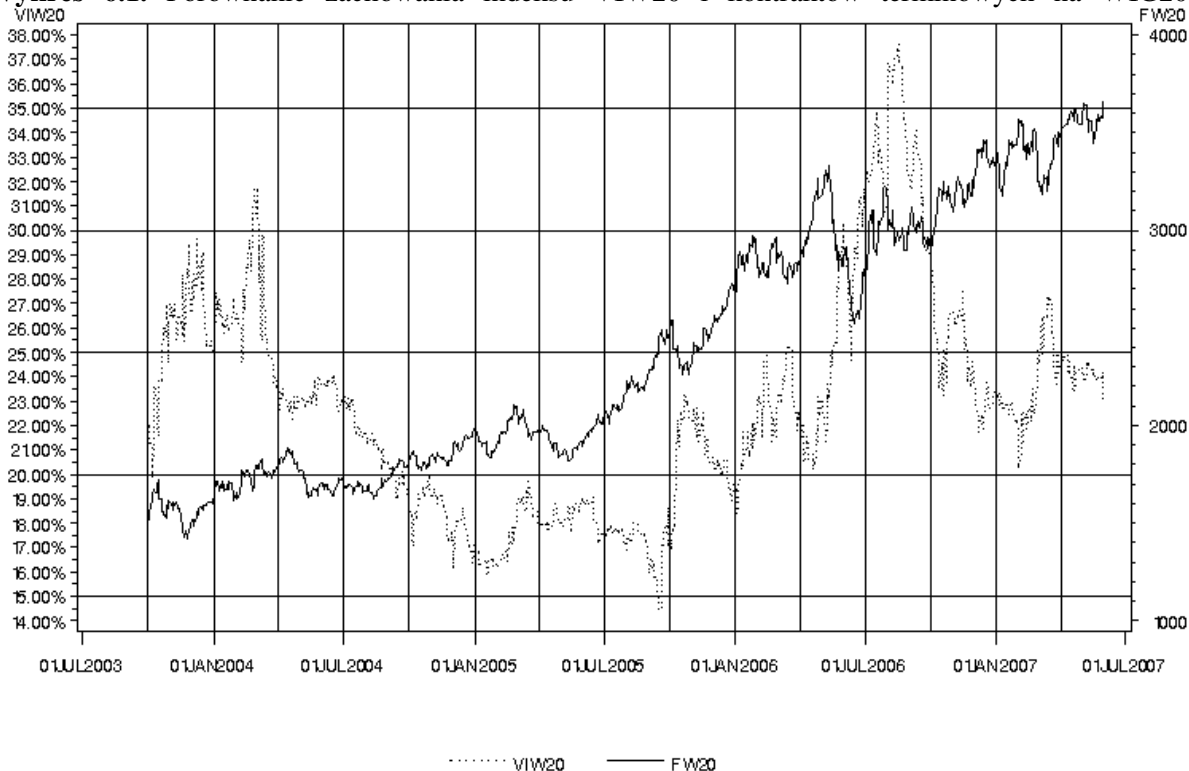
<sup>a</sup>Fluktuacje zmienności intraday w okresie 2-8 lutego 2005 r., obrazujące tydzień niskiej zmienności.

Prezentowane wykresy pomimo pozornej różnicy (tydzień wysokiej i niskiej zmienności) mają wspólną cechę, tj. niestabilność indeksu zmienności w czasie, która jest kluczową charakterystyką dla praktyków zarządzających ryzykiem zmienności.

## 6. Optimalizacja portfela indeksowego przy wykorzystaniu indeksu VIW20

Właściwości rozkładu prezentowanych indeksów zmienności, szczegółowo opisane wcześniej, skłoniły nas do zdefiniowania kilku prostych strategii inwestycyjnych, wykorzystujących zarówno indeksy zmienności, jak i kontrakty terminowe na indeksy giełdowe, w celu dokładniejszego omówienia właściwości miary zmienności niewykorzystywanej do tej pory na polskim rynku kapitałowym. Bezpośrednią przyczyną powstania wspomnianych strategii była analiza wizualna wykresów 6.1-6-3, która podobnie jak tab. 6.1-6.3. sugerowała silną ujemną korelację pomiędzy zmianami indeksów zmienności (VIW20 i VIX) a kontraktami terminowymi na indeksy giełdowe (FW20 i FS&P500).

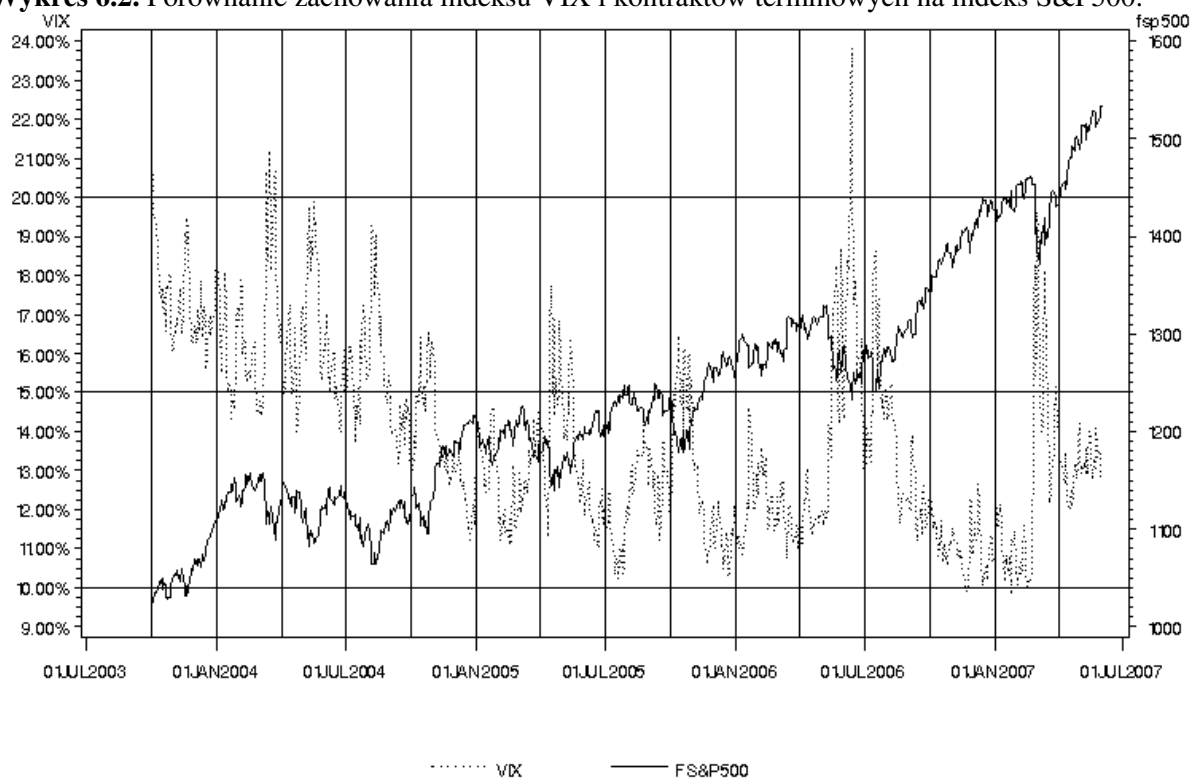
**Wykres 6.1.** Porównanie zachowania indeksu VIW20 i kontraktów terminowych na WIG20.



<sup>a</sup> VIW20 i kontrakt FW20 w okresie październik 2003 r. – maj 2007 r. na danych dziennych.

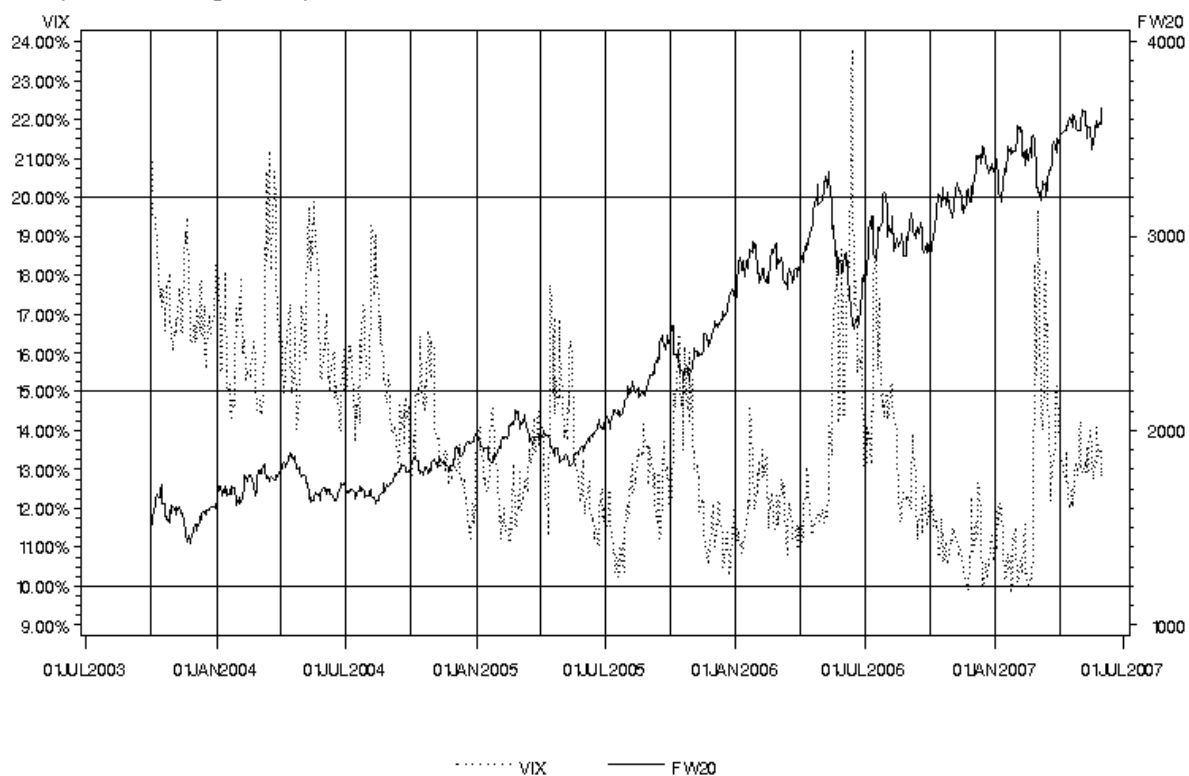
Analizując wykresy nr 6.1. i 6.2. ponownie zauważamy istotne różnice w zachowaniu się indeksów VIW20 i VIX, jednak należy je w dużej części przypisać faktowi, że VIX antycypuje zmienność 30-dniową, podczas gdy jego polski odpowiednik pokazuje oczekiwaną zmienność 91-dniową. W związku z tym, bazując na zjawisku długiej pamięci w szeregach zmienności, zapoczątkowany ruch zmienności trwa znacznie dłużej na wykresie VIW20 niż na wykresie VIX, ale sam moment skoku zmienności, biorąc pod uwagę ich silną korelację, powinien być taki sam na obydwu wykresach. Niestety, powyższa obserwacja niesie ze sobą poważne konsekwencje dla procesu definiowania strategii inwestycyjnych, opisanych w tej i kolejnych częściach artykułu, które dlatego też powinny zostać zdefiniowane, zarówno przy wykorzystaniu indeksu VIX, jak i nowo obliczonego indeksu VIW20.

**Wykres 6.2.** Porównanie zachowania indeksu VIX i kontraktów terminowych na indeks S&P500.<sup>a</sup>



<sup>a</sup> VIW20 i kontrakt FW20 w okresie październik 2003 r. – maj 2007 r. na danych dziennych.

**Wykres 6.3.** Porównanie zachowania indeksu VIX i kontraktów terminowych na indeks WIG20 w badanym okresie - poziomy, dane dzienne.



<sup>a</sup> VIW20 i kontrakt FW20 w okresie październik 2003 r. - maj 2007 r. na danych dziennych.

W kolejnym kroku obserwacje wizualne postanowiliśmy dodatkowo sprawdzić statystycznie. W tym celu prezentujemy tabele korelacji dziennych i tygodniowych stóp zwrotu indeksów zmienności i kontraktów terminowych na indeksy giełdowe<sup>13</sup> dla następujących par: VIW20 – FW20, VIX – FS&P500 oraz VIX – FW20.

**Tabela nr 6.1.** Korelacja pomiędzy dziennymi stopami zwrotu z indeksów zmienności: VIW20, VIX, a dziennymi stopami zwrotu z indeksów giełdowych: WIG20, S&P500.<sup>a</sup>

okres	Corr_VIW20_ FW20	p-value	N	Corr_VIX_ FS&P500	p-value	N	Corr_VIX_ FW20	p-value	N
01.10.2003- 31.08.2004	-0.114	0.088	225	-0.808	<0.0001	231	-0.148	0.0277	225
01.09.2004- 31.07.2005	-0.201	0.0022	229	-0.753	<0.0001	230	-0.232	0.0005	224
01.08.2005- 30.06.2006	-0.228	0.0005	231	-0.849	<0.0001	232	-0.111	0.0966	225
01.07.2006- 31.05.2007	-0.405	<0.0001	229	-0.230	0.0005	225	-0.102	0.1306	229
01.10.2003- 31.05.2007	-0.229	<0.0001	914	-0.648	<0.0001	918	-0.135	<0.0001	903

<sup>a</sup> Obliczenia przeprowadzone na na danych dziennych dla kolejnych okresów rocznych poddanych badaniom oraz dla pełnego okresu.

Pierwsza tabela (6.1) prezentuje korelacje pomiędzy dziennymi stopami zwrotu dla indeksów zmienności i kontraktów terminowych na indeksy giełdowe. Porównanie odpowiednich współczynników korelacji dla VIW20 i FW20 obrazuje istotną korelację w ciągu całego okresu, która dodatkowo wzrasta w kolejnych okresach 11-miesięcznych, sugerując niestabilny w czasie się charakter zmienności i coraz silniejsze negatywne powiązanie VIW20 i FW20. Tendencja zmian współczynników korelacji dla polskich indeksów ma swoje silne potwierdzenie w odpowiednich wartościach dla indeksów amerykańskich, dla których obserwujemy znacznie silniejszą ujemną korelację, istotną statystycznie nawet na 1% poziomie istotności. Po analizie wykresu 6.3, w tab. 6.1 prezentujemy również korelacje pomiędzy indeksem VIX a kontraktem FW20, której analiza skłania nas do zdefiniowania odpowiednich strategii inwestycyjnych dla pary tych dwóch instrumentów.

**Tabela nr 6.2.** Korelacja pomiędzy uśrednionymi (5-okresowa średnia krocząca) stopami zwrotu z indeksów zmienności: VIW20, VIX, a uśrednionymi stopami zwrotu z indeksów giełdowych WIG20, S&P500.<sup>a</sup>

okres	Corr_mov5- VIW20_mov5- FW20	p-value	N	Corr_mov5- VIX_mov5- FS&P500	p-value	N	Corr_mov5- VIX_mov5- FW20	p-value	N
01.10.2003- 31.08.2004	-0.150	0.0257	221	-0.805	<0.0001	227	-0.355	<0.0001	221
01.09.2004- 31.07.2005	-0.176	0.0075	229	-0.718	<0.0001	230	-0.406	<0.0001	224
01.08.2005- 30.06.2006	-0.368	<0.0001	231	-0.830	<0.0001	232	-0.372	<0.0001	225
01.07.2006- 31.05.2007	-0.488	<0.0001	229	-0.664	<0.0001	225	-0.332	<0.0001	229
01.10.2003- 31.05.2007	-0.318	<0.0001	910	-0.741	<0.0001	914	-0.355	<0.0001	899

<sup>a</sup> Obliczenia przeprowadzone na na danych dziennych dla kolejnych okresów rocznych poddanych badaniom oraz dla pełnego okresu.

Zakładając odmienny związek dla danych uśrednionych w porównaniu z danymi dziennymi, w tab. 6.2 przedstawiamy korelację pomiędzy danymi tygodniowymi, obserwując znacznie silniejszą ujemną korelację w tym ujęciu. Obserwujemy ją szczególnie w przypadku par: VIW20 – FW20 oraz VIX – FW20, co oczywiście potwierdza nasze początkowe przypuszczenia o kierunku i sile tego związku, a jednocześnie założenie o istnieniu ujemnej zależności, nie tylko pomiędzy VIW20-FW20,

<sup>13</sup> W przedstawianych strategiach wykorzystujemy kontrakty terminowe na WIG20, a nie indeks giełdowy, z uwagi na silne skorelowanie tych dwóch instrumentów oraz fakt, że w praktyce inwestycyjnej koszty transakcyjne, związane z inwestycją w kontrakt terminowy, są istotnie niższe.

ale również VIX-FW20. Powyższa zależność pośrednio implikuje silny związek dodatni pomiędzy indeksami zmienności (VIX, a VIW20), pomimo faktu obliczenia ich dla różnych rynków (rynek rozwinięty, a rozwijający się), a nawet odmiennych horyzontów czasowych (30, a 90 dni). Powyższą obserwację rozwiniemy dodatkowo we wnioskach końcowych.

Zaobserwowana silna ujemna korelacja, zarówno pomiędzy dziennymi, jak i uśrednionymi stopami zwrotu, skłoniła nas do zobrazowania tej własności na przykładzie prostej strategii inwestycyjnej. Strategia A polega na inwestycji 50% wartości portfela w indeks zmienności oraz 50% wartości portfela w FW20. Warunkiem otwarcia opisaną strategii jest zejście indeksu VIW20 poniżej 1, 5 lub 10 percentyla, a inwestycję w indeks zmienności przetrzymujemy przez z góry określony okres  $n$  dni, dla  $n = \{21, 42, 63, 126\}$ , co ma w rezultacie obrazować proces powrotu do średniej. Zachowanie strategii badamy w okresie od października 2003 r. do maja 2007 r. (tab. 6.3).

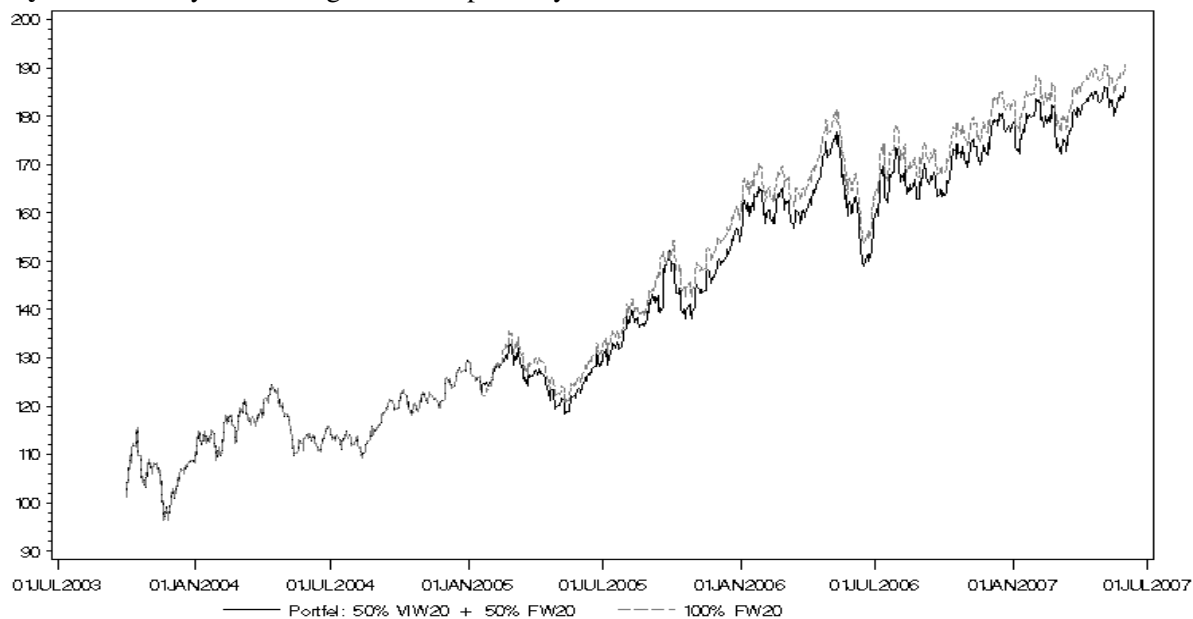
**Tab. 6.3.** Wyniki Strategii\_A\_n\_k-ty percentyl dla  $n = \{21, 42, 63, 126\}$  dla pełnego okresu.

stat	instr.	n = 21	n = 42	n = 63	n = 126
		VIW20 < 1 percentyl			
r	FW20	0.0009827	0.0009827	0.0009827	0.0009827
	Strategia_A: 50/50	0.0009326	0.00123	0.00111	0.00105
Corr_VIW20_FW20		-0.22204	-0.22204	-0.22204	-0.22204
	p-value	<.0001	<.0001	<.0001	<.0001
sd	FW20	0.01450	0.01450	0.01450	0.01450
	Strategia_A: 50/50	0.01479	0.01493	0.01497	0.01478

<sup>a</sup> Tabela przedstawia średnie dzienne stopy zwrotu i odchylenia standardowe dla inwestycji w strategię A lub w kontrakt FW20 w okresie październik 2003 r. – maj 2007 r.

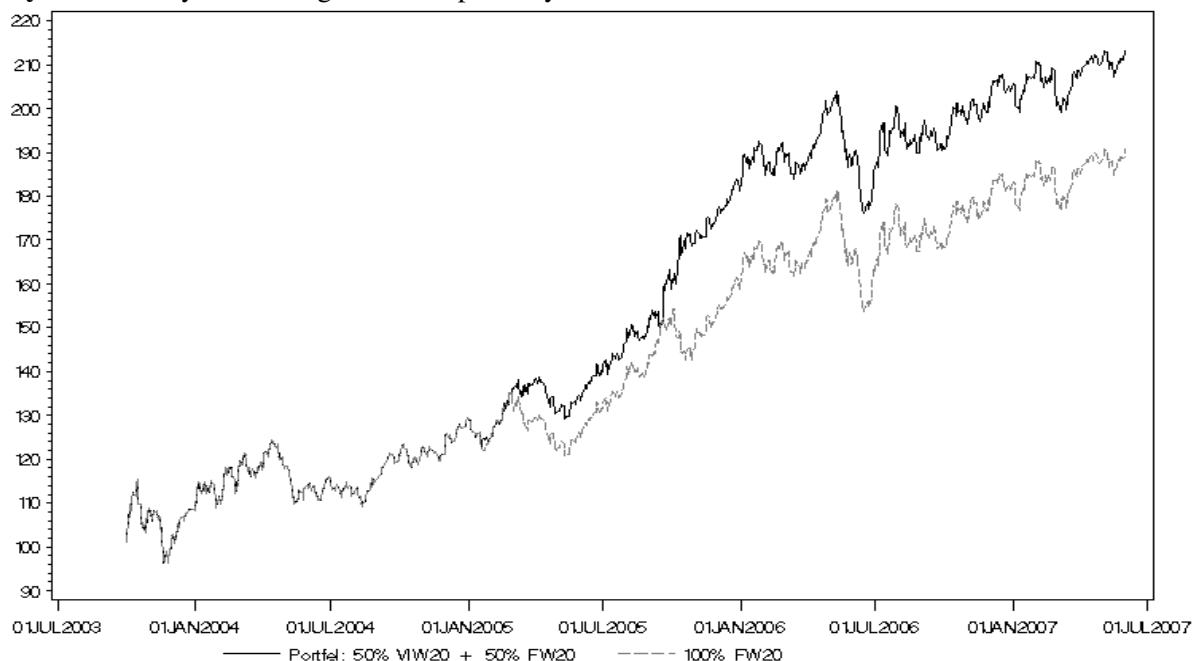
Wyniki zaprezentowane w tab. 6.3 potwierdzają istotną negatywną korelację pomiędzy indeksami zmienności a kontraktami na odpowiednie indeksy giełdowe, co następnie może być wykorzystane nie tylko w różnorodnych strategiach inwestycyjnych, ale również w zaawansowanych modelach zarządzania ryzykiem. Wspomniane wyniki ukazują możliwość istotnego zwiększenia stopy zwrotu przy jednoczesnej stabilizacji odchylenia standardowego na wyjściowym poziomie.

**Wykres 6.4.** Wyniki Strategii\_A\_21\_1percentyl *versus* FW20.<sup>a</sup>



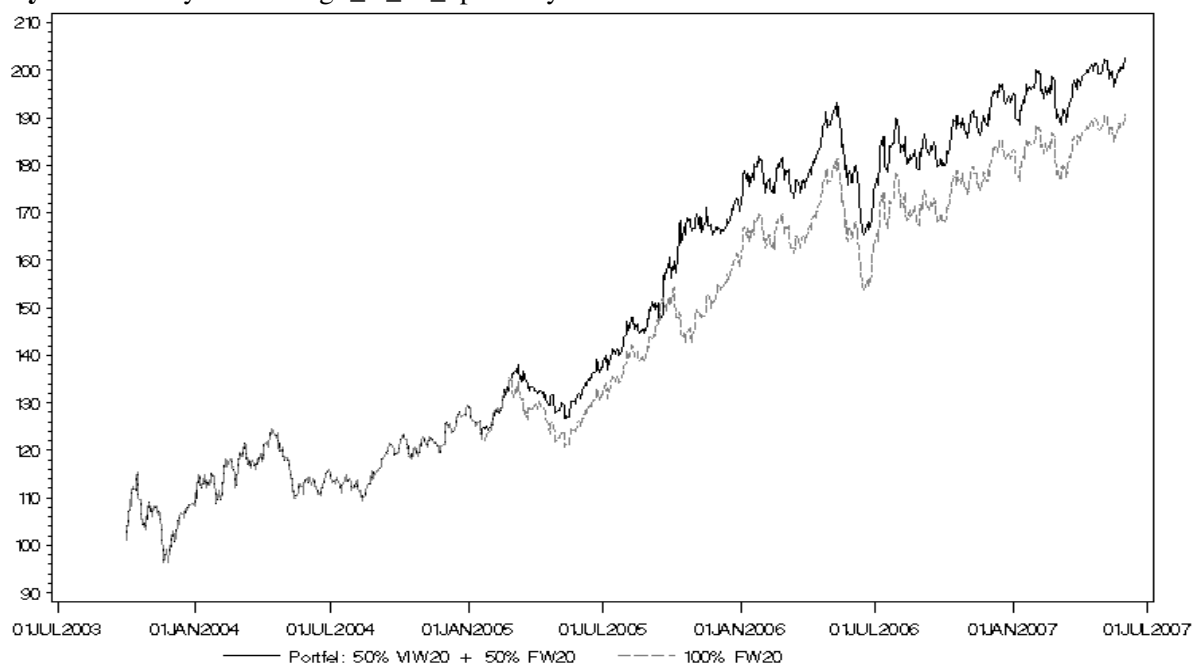
<sup>a</sup> Strategia A jest inicjowana w momencie, kiedy VIW20 znajduje się poniżej 1 percentyla. Okres inwestycji w VIW20 wynosi 21 dni. Zachowanie strategii porównujemy z inwestycją 100% kapitału w kontrakty FW20. Wykres pokazuje skumulowaną stopę zwrotu przy założeniu, że inwestycją początkową jest 100.

Wykres 6.5. Wyniki Strategii\_A\_42\_1percentyl versus FW20.<sup>a</sup>



<sup>a</sup> Strategia A jest inicjowana w momencie, kiedy VIW20 znajduje się poniżej 1 percentyla. Okres inwestycji w VIW20 wynosi 42 dni. Zachowanie strategii porównujemy z inwestycją 100% kapitału w kontrakty FW20. Wykres pokazuje skumulowaną stopę zwrotu przy założeniu, że inwestycją początkową jest 100.

Wykres 6.6. Wyniki Strategii\_A\_63\_1percentyl versus FW20.<sup>a</sup>



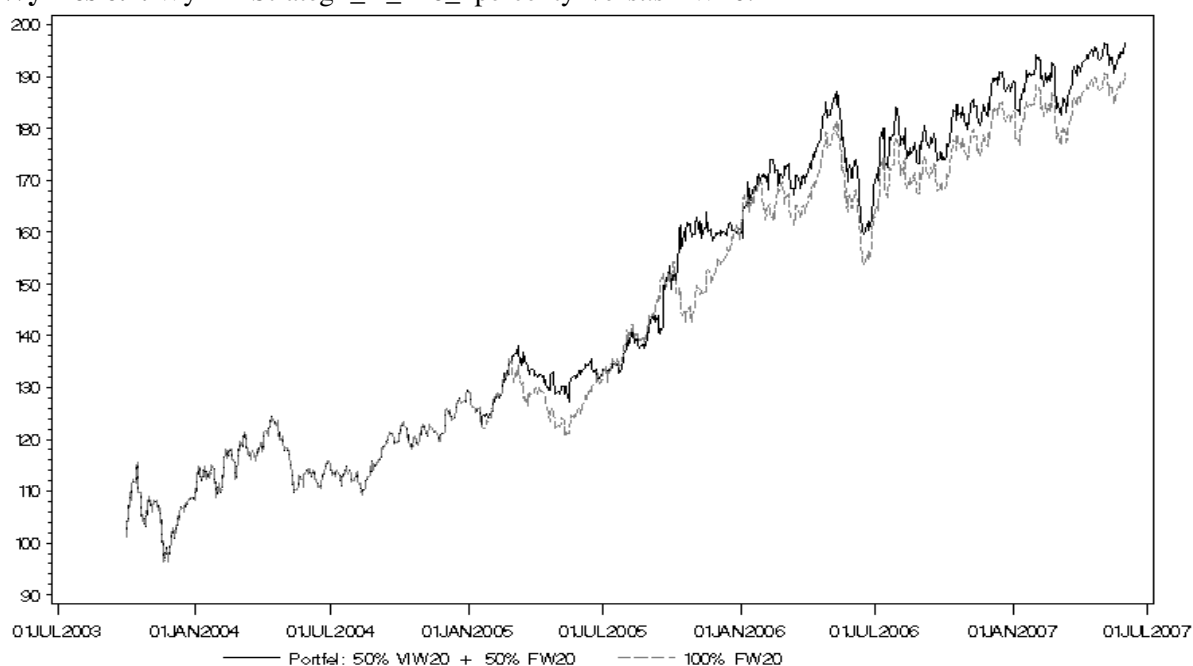
<sup>a</sup> Strategia A jest inicjowana w momencie, kiedy VIW20 znajduje się poniżej 1 percentyla. Okres inwestycji w VIW20 wynosi 63 dni. Zachowanie strategii porównujemy z inwestycją 100% kapitału w kontrakty FW20. Wykres pokazuje skumulowaną stopę zwrotu przy założeniu, że inwestycją początkową jest 100.

Porównując ze sobą wyniki z tab. 6.3 oraz wykresy 6.4-6.7 przedstawiające skumulowaną stopę zwrotu dla strategii testowej oraz inwestycji kontrolnej: 100% wartości kapitału w indeks FW20, zwracamy również uwagę na istotny wpływ parametru  $n$ , który miał odzwierciedlać średnią długość procesu powrotu do średniej/minimum. Różnice odpowiednio w stopach zwrotu, odchyleniach standardowych, a następnie skumulowanych stopach zwrotu przedstawionych na wykresie sugerują,

że odpowiednia estymacja długości tego procesu ma istotne znaczenie przy wykorzystaniu własności indeksów zmienności. W naszym przykładzie najlepsze wyniki otrzymaliśmy dla  $n = 42$  dni kalendarzowych, jednak zdajemy sobie sprawę, że dysponujemy zbyt krótkim odcinkiem czasu, aby postawić daleko idące wnioski w tym temacie.

Zauważmy również, że opisywana strategia ma postać najprostszej techniki typu *buy&hold*, co dodatkowo ma zwrócić uwagę jedynie na wpływ nowego elementu w postaci indeksu zmienności, abstrahując od wysublimowanych technik *timingu*, które moglibyśmy wykorzystać w celu poprawienia końcowej stopy zwrotu. Ponadto z uwagi na krótki okres istnienia rynku opcyjnego w Polsce nie mogliśmy pokazać, jak strategia zachowuje się w długim terminie, gdzie jej efektywność powinna być znacznie bardziej widoczna. Podobne strategie możemy projektować dla rynku amerykańskiego (VIX i FS&P500) lub niemieckiego (VDAX i FDAX), gdzie indeksy zmienności są publikowane przez odpowiednie giełdy, a dodatkowo w obrocie znajdują się również instrumenty pochodne na zmienność.

**Wykres 6.7.** Wyniki Strategii\_A\_126\_1percentyl versus FW20.<sup>a</sup>



<sup>a</sup> Strategia A jest inicjowana w momencie, kiedy VIW20 znajduje się poniżej 1 percentyla. Okres inwestycji w VIW20 wynosi 126 dni. Zachowanie strategii porównujemy z inwestycją 100% kapitału w kontrakty FW20. Wykres pokazuje skumulowaną stopę zwrotu przy założeniu, że inwestycją początkową jest 100.

W podsumowaniu tej części artykułu chcielibyśmy podkreślić kilka istotnych elementów dotyczących indeksu VIW20. Po pierwsze, skupiliśmy się na wykorzystaniu ujemnej korelacji pomiędzy indeksem VIW20, a kontraktami terminowymi. Szczególnie interesującą własnością tej korelacji jest fakt, że w przeciwieństwie do normalnych aktywów nie zanika ona w momentach zawirowań rynkowych, ale dodatkowo nasila się w przypadku silnych spadków indeksów giełdowych. Po drugie, zaznaczyliśmy istotność okresu, na który inwestycja w indeks zmienności jest dokonywana, powiązując jego długość ze średnią długością procesu powracania do średniej. Po trzecie, rezultaty badania ponownie wskazują na istotność zjawiska długiej pamięci i znaczenie horyzontu czasowego, dla którego indeks zmienności jest obliczany. W dalszej części pracy spróbujemy zastanowić się nad znaczeniem omawianego tematu dla rozwoju rynku instrumentów pochodnych na rynkach rozwijających się.

## 7. Czy rynki rozwijające się rzeczywiście potrzebują zaawansowanych miar ryzyka zmienności?

Wnioski zebrane w części empirycznej skłaniają nas do zastanowienia się nad potrzebą wprowadzenia zaawansowanych miar ryzyka zmienności na rynkach rozwijających się, w celu zapewnienia ich stabilnego rozwoju, gdzie w momentach korekt rynkowych odgrywa ono szczególne znaczenie.

Przeprowadzone badanie pokazuje, że indeks zmienności (VIW20) jest doskonałym barometrem zachowania się indeksu WIG20, a jednocześnie wyraża oczekiwania rynkowe dotyczące amplitudy jego wahań. Podstawową zaletą indeksu VIW20 jest możliwość zabezpieczenia zmienności niezależnie od przyszłego kierunku ruchu cen oraz fakt, że korelacja ujemna w momencie skrajnych zachowań rynku nie zanika, jak to ma miejsce w przypadku standardowych instrumentów, ale dodatkowo ulega nasileniu. Własność ta umożliwia ponadto zabezpieczenie nie tylko ryzyka zmienności, ale również ryzyka zmiany ceny w strategiach inwestycyjnych, gdzie koszty standardowych strategii zabezpieczających szczególnie wzrastają w momentach wysokiej zmienności. W rzeczywistości ryzyko rynkowe, w sensie ryzyka zmiany ceny, możemy zabezpieczyć wieloma rodzajami instrumentów pochodnych, jednak strategia zabezpieczająca działa efektywnie jedynie do momentu silnego wzrostu zmienności rynków, kiedy to nawet bardzo zaawansowane strategie przestają przynosić oczekiwane rezultaty, ponieważ silny wzrost zmienności powoduje: wzrost ryzyka bazy, zmianę podstawowych korelacji pomiędzy aktywami, spadek płynności, co oczywiście przekłada się na określony koszt finansowy takiego przedsięwzięcia oraz nieadekwatność standardowych podejść do zarządzania ryzykiem w sytuacjach skrajnych.

Podsumowując wnioski z analizy empirycznej, uważamy, że istnieje poważna potrzeba wprowadzenia indeksu VIW20 lub podobnej miary zmienności na GPW SA w Warszawie w celu dalszego rozwoju rynku instrumentów pochodnych, m.in. poprzez uzupełniania palety możliwości inwestycyjnych. Takie działania dodatkowo zachęciłyby, a co najważniejsze – umożliwiłyby profesjonalnym inwestorom i zarządzającym ryzykiem aktywną realokację portfela instrumentów pochodnych, a w rezultacie dalszy, gwałtowny rozwój rynku produktów strukturyzowanych. W analizie potencjonalnego rozwoju rynku instrumentów pochodnych po wprowadzeniu indeksu zmienności oraz pochodnych na nim opartych najistotniejsze jest powiązanie rynku *futures* i opcyjnego poprzez zaawansowane strategie inwestycyjne, do których składowych te dwa elementy należą. Zarządzania ryzykiem takich strategii zostałoby znacznie ułatwione poprzez dostępność instrumentów pochodnych, opartych na zmienności rynku, a GPW w Warszawie miałaby szansę stać się pierwszym rynkiem rozwijającym się w Europie, który umożliwi szerokiej grupie inwestorów zabezpieczanie ryzyka zmienności. Widzimy również konieczność wprowadzenia opcji o krótszych oraz dłuższych terminach wygaśnięcia (tygodniowe, miesięczne, dwu-, trzyletnie), aby pojawiła się możliwość odzwierciedlenia płaszczyzny zmienności, obliczania indeksów zmienności o różnych horyzontach czasowych antycypowanej zmienności, a następnie przy pomocy instrumentów pochodnych na nich opartych zarządzaniu ryzykiem zmienności.

Nasilająca się globalizacja rynków finansowych daje oczywiście rozwiązanie alternatywne, tj. możliwość zabezpieczenia portfela indeksu WIG20 przy pomocy indeksu zmienności z rynku amerykańskiego. Jest to oczywiście wyjście zastępcze dla inwestorów działających na rynku polskim, ale z drugiej strony – nie znajdując innej alternatywy, będzie niestety jedynym wyjściem, jeśli GPW nie wprowadzi w najbliższym czasie odpowiednich indeksów i instrumentów opartych na zmienności.

## **8. Podsumowanie. Wartość dodana pracy. Kierunki dalszych badań.**

W podsumowaniu zwracamy uwagę na wnioski natury teoretycznej i praktycznej, dodatkowo podkreślając wartość dodaną pracy oraz znaczenie omawianego tematu dla rozwoju polskiego rynku instrumentów pochodnych. W tym miejscu w ramach podsumowania przedstawionego badania chcemy również zaznaczyć kierunki dalszych prac w tej tematyce, stanowiące wyzwania badawcze w nieodległej przyszłości.

Zebrany materiał teoretyczny oraz empiryczny miał na celu zobrazowanie możliwości wyznaczania indeksu zmienności na danych intraday z polskiego rynku kapitałowego w trakcie sesji giełdowej, a jednocześnie zwrócenie uwagi uczestników polskiego rynku na konieczność wprowadzenia instrumentów pochodnych, opartych na zmienności. Wartość dodaną niniejszego artykułu możemy podsumować w kilku punktach:

- pierwszy indeks zmienności dla europejskiego kraju rozwijającego się, pozwalający odpowiednio skwantyfikować ryzyko zmienności na polskim rynku kapitałowym,
- bazując na danych wysokiej częstotliwości, indeks oblicza zmienność w trakcie sesji giełdowej, kiedy informacje o jej aktualnym poziomie mają kluczowe znaczenia dla uczestników rynku,
- pierwszy instrument pozwalający zarówno kwantyfikować ryzyko, jak i dający podstawy do stworzenia instrumentów pochodnych, opartych na zmienności, dzięki czemu ma szerokie zastosowanie w instytucjach działających na rynku kapitałowym: fundusze inwestycyjne, OFE, Asset Management oraz w przypadku inwestorów indywidualnych,
- warstwa teoretyczna – przedstawienie poprawek metodologicznych, dzięki którym stosowanie formuły opracowanej dla indeksu VIX stało się możliwe na polskim rynku giełdowym, a konkretnie rynku opcyjnym, który będąc w początkowej fazie rozwoju, wykazuje pewne niedoskonałości nieobecne na rynkach rozwiniętych.

Modyfikacja wspomnianej metodologii dla indeksu VIX pozwoliła nam na obliczenie VIW20 – indeksu zmienności dla polskiego rynku akcyjnego, jako pierwszej syntetycznej miary zmienności obliczonej na danych wysokiej częstotliwości, pozwalającej ocenić ryzyko rynku giełdowego na dany moment w czasie. Dokładna analiza indeksu VIW20 w powiązaniu z indeksem VIX oraz indeksami giełdowymi, stanowiącymi bazę dla wyznaczanych indeksów zmienności (WIG20, S&P500) pozwoliła zdefiniować kilka istotnych własności indeksu VIW20:

- silną, istotną statystycznie korelację ujemną pomiędzy indeksami zmienności, a odpowiednimi indeksami giełdowymi, szczególnie wysoką w okolicach minimów i maksimów lokalnych na indeksach giełdowych (WIG20, S&P500), zależną jednak od założonego okresu, dla którego zmienność jest antycypowana,
- możliwość wykorzystania własności indeksu VIW20 w strategiach inwestycyjnych – indeks VIW20 pozwala istotnie zwiększyć stopę zwrotu przy stabilnym poziomie ryzyka nawet prostej strategii *buy&hold*, stosowanej dla portfela indeksowego,
- analiza rozkładu indeksu VIW20 pozwoliła dodatkowo potwierdzić pewne własności zmienności zaobserwowane już wcześniej w odniesieniu do zmienności zrealizowanej: grupowanie zmienności, proces powracania do średniej/minimum, zjawisko długiej pamięci.
- dodatkową własnością jest fakt, że indeks zmienności estymuje zmienność na podstawie danych dla jednego interwału i nie potrzebuje do obliczeń żadnych dodatkowych informacji.

Analizując właściwości indeksów zmienności oraz instrumentów pochodnych na nich opartych, możemy wskazać kilka podstawowych funkcji, które spełniają na rynkach kapitałowych, dzięki którym ich znaczenie jest tak istotne:

- informacyjna – pozwala w obiektywny sposób ocenić zmienność rynku akcyjnego, a dodatkowo stanowi doskonały punkt odniesienia w procesie konstruowania strategii inwestycyjnych oraz dla prognoz w ekonometrycznych modelach zmienności. Jest to funkcja niedostatecznie podkreślona w naszym artykule, a jednocześnie na początkowym etapie zaawansowania inwestorów dająca możliwość oceny ryzyka aktualnych inwestycji poprzez porównanie aktualnego poziomu zmienności z jej historycznymi fluktuacjami,
- inwestycyjna – jako instrument spekulacyjny dla aktywnych inwestorów, którzy poprzez powiązanie swoich strategii z rynkiem kontraktów terminowych i opcji na indeks oraz wyeksponowanie na ryzyko zmienności potrzebują tego instrumentu jako składnika do swoich portfeli, co w rezultacie przekłada się na zwiększenie płynności tej grupy instrumentów,
- dywersyfikacyjna – dla inwestorów optymalizujących skład portfela akcyjnego, chcących zwiększyć jego stopę zwrotu przy jednoczesnej minimalizacji ryzyka,
- zapewniająca rozwój dodatkowych instrumentów – umożliwiającą powstawanie nowych, bardziej zaawansowanych produktów strukturyzowanych, opartych również na instrumentach pochodnych na zmienność.

Dokładne zgłębienie opisywanego tematu jednocześnie sugeruje kierunki do dalszych badań szeroko rozumianej zmienności, sposobu jej modelowania i predykcji oraz implikacji modeli teoretycznych dla sfery praktycznej. Niewątpliwie warstwa prognostyczna została niedostatecznie wyeksponowana w tym badaniu, ale też główny nacisk położony był na dokładne przedstawienie własności po raz pierwszy prezentowanego indeksu zmienności. W dalszych badaniach skupimy się

nad związkiem pomiędzy założonym okresem, dla którego zmienność jest antycypowana w indeksie zmienności (30 dni – VIX, 91 dni – VIW20), a faktyczną zmiennością na rynku, szacowaną przy pomocy odpowiedniego estymatora (RV – zmienność zrealizowana), po upływie wskazanej liczby dni od chwili obecnej. W kolejnym badaniu chcielibyśmy również wyznaczyć odpowiednie indeksy antycypujące zmienność oczekiwaną dla okresu kolejnych 30, 91, 182 oraz 365 dni kalendarzowych, zarówno dla rynku polskiego, jak i amerykańskiego, oraz na ich podstawie zastanowić się nad strukturą czasową zmienności. Ponadto rozwinięcia wymaga zależność pomiędzy indeksami zmienności na rynkach rozwiniętych i rozwijających się, czyli odpowiedź na pytanie o to, jak szybko odbywa się transfer szoków zmienności pomiędzy rynkami oraz dokładniejsze zbadanie bardziej zaawansowanych strategii inwestycyjnych łączących w sobie indeksy zmienności i indeksy giełdowe głównie w celu zmniejszenia ryzyka inwestycji.

Na koniec, skupiając się na wnioskach natury praktycznej i odnosząc się do zarzutów o zbyt wczesnym etapie rozwoju polskiego rynku instrumentów pochodnych w kwestii wprowadzenia instrumentów pochodnych na zmienność do obrotu giełdowego, pytamy: *czy na pewno skutek i przyczyna są ustawione w odpowiedniej sekwencji?* Sugerując wprowadzenie opisywanych instrumentów, twierdzimy, że takie działanie, właśnie poprzez poszerzenie palety instrumentów inwestycyjnych i zabezpieczających, przyczyniłoby się do dalszego rozwoju tego rynku, a jednocześnie do wzmocnienia pozycji GPW w Warszawie.

### **Aneks.** Szczegółowa metodologia obliczania indeksu VIW20.

W tym miejscu prezentujemy skrócony opis metodologii obliczania indeksu VIW20 oraz niezbędne poprawki w porównaniu do oryginalnej metodologii<sup>14</sup>. Główny wzór do obliczenia indeksu VIW20 przedstawia się następująco:

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} * Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[ \frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (A.1)$$

gdzie:

$$\sigma = \frac{VIW20}{100} \Rightarrow VIW20 = \sigma * 100 \quad (A.2)$$

- T – czas do wygaśnięcia (w latach z dokładnością do minut),
- F – cena terminowa wyznaczona na podstawie cen opcji,
- $K_i$  – cena wykonania i-tej opcji *out-of-the-money*; opcji *call*, jeśli  $K_i > F$ , i opcji *put* jeśli  $K_i < F$ ,
- $\Delta K_i$  – przedział pomiędzy cenami wykonania – połowa odstępu pomiędzy wyższą i niższą ceną wykonania w stosunku do  $K_i$ :

$$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2} \quad (A.3)$$

dla najniższej ceny wykonania ta zmienna jest różnicą pomiędzy dwiema najniższymi cenami wykonania; podobnie sytuacja wygląda dla najwyższej ceny wykonania,

- $K_0$  – cena wykonania bezpośrednio poniżej ustalonego poziomu indeksu Forward (F),
- R – wolna od ryzyka stopa procentowa,
- $Q(K_i)$  – środkowe kwotowanie ( $0.5 * (bid + ask)$ ) dla każdej opcji z ceną wykonania  $K_i$ ,

W formule obliczeniowej indeksu VIW20 wykorzystujemy opcje *call* i *put* z dwoma najbliższymi terminami wygaśnięcia<sup>15</sup> do założonego 91-dniowego okresu kalendarzowego, dla którego VIW20 ma w założeniu przybliżać zmienność.

Założmy, że wyznaczamy wartość VIW20 na godz. 9.30 oraz że mamy do dyspozycji opcje o 44 (seria A) i 135 (seria B) dniach do wygaśnięcia. Czas do wygaśnięcia (T) mierzymy w minutach, a

<sup>14</sup> Patrz: VIX White Paper, 2003.

<sup>15</sup> Jeśli czas do wygaśnięcia dla jednego z kontraktów byłby krótszy od 8 dni, wtedy zastępujemy go kolejnym kontraktem w kierunku do wygaśnięcia, aby zminimalizować anomalie w wycenie pojawiające się na krótko przed wygaśnięciem.

nie w dniach w celu uwzględnienia precyzji niezbędnej przy aktywnym handlu opcjami. Sposób obliczenia czasu do wygaśnięcia w naszym przykładzie podaje poniższy wzór:

$$T = \{M_{\text{dzisiaj}} + M_{\text{dzień wygaśnięcia}} + M_{\text{pozostałe dni}}\} / T_{365} \quad (\text{A.4})$$

gdzie:

- $M_{\text{dzisiaj}}$  – liczba minut do północy dzisiejszego dnia,
- $M_{\text{dzień wygaśnięcia}}$  – liczba minut od północy do godz. 16.30 w dniu wygaśnięcia,
- $M_{\text{pozostałe dni}}$  – liczba minut pomiędzy dniem dzisiejszym a dniem wygaśnięcia,
- $T_{365}$  – liczba minut w ciągu 365 dni.

W związku z tym czas do wygaśnięcia dla serii A i B wynosi:

$$T_A = \{840 + 990 + 61920\} / 525600 = 0.121289954$$

$$T_B = \{840 + 990 + 192960\} / 525600 = 0.370606022$$

Za stopę wolną od ryzyka przyjmujemy WIBOR-3M, który dla danych w zadaniu wynosił 5,1%. Dla uproszczenia obliczeń przyjmujemy, że ta sama liczba opcji zostanie wykorzystana dla dwóch serii. W praktyce jednak musimy pamiętać o tym, że taka sytuacja nie musi mieć miejsca.

**KROK 1.** Wybieramy opcje, które następnie zostaną wykorzystane w procesie obliczania indeksu VIW20.

Wyznaczamy poziom indeksu Forward (F), na podstawie kwotowań opcji *at-the-money*. Wybrana cena wykonania opcji *at-the-money* powinna minimalizować różnicę pomiędzy cenami opcji *call* i *put*. Tab. A.1. pokazuje sposób wyboru odpowiedniej ceny wykonania do obliczenia poziomu indeksu Forward zarówno dla serii A, jak i B, dla hipotetycznego dnia giełdowego.

**Tab. A.1.** Wybór ceny wykonania do obliczenia poziomu indeksu Forward dla serii A oraz B.<sup>a</sup>

Seria A				Seria B			
Cena Wykonania	Call	Put	Różnica	Cena Wykonania	Call	Put	Różnica
3500	349.00	66.9	282.1	3500	445.5	156.3	289.2
3600	270.50	92.2	178.3	3600	372.7	189.3	183.4
3700	200.50	124.5	76	3700	310.1	226.9	83.2
3800	143.25	164.6	21.35	3800	254.7	269.1	14.4
3900	97.75	213.3	115.55	3900	206.5	328.0	121.5
4000	74.4	270.8	196.4	4000	169.8	372.8	203
4100	44.3	341.6	297.3	4100	139.3	434	294.7

<sup>a</sup> Obliczenia dla hipotetycznego dnia notowań w listopadzie 2007 roku, godz. 10.00, indeks WIG20 = 3806.

Następnie w celu obliczenia indeksu Forward wykorzystujemy następującą formułę:

$$F = K + e^{RT} * (c - p) \quad (\text{A.5})$$

gdzie:

- K – wybrana cena wykonania,
- c – cena opcji *call*,
- p – cena opcji *put*.

Wykorzystując dane przedstawione w tab. A.1., obliczamy cenę terminową dla serii A oraz B:

$$F_A = 3800 + e^{(0.051 * 0.121289954)} * |143.25 - 164.4| = 3821.48$$

$$F_B = 3800 + e^{(0.051 * 0.370606022)} * |254.7 - 269.1| = 3814.67$$

Następnie definiujemy  $K_0$  – cenę wykonania bezpośrednio poniżej ustalonego indeksu Forward (F). W naszym przypadku będzie to  $K_0 = 3800$  dla obu terminów wygaśnięcia.

W kolejnym kroku sortujemy opcje według wznoszącej się ceny wykonania. Wybieramy opcje *call* z ceną wykonania większą od  $K_0$  oraz niezerową ofertą kupna. Dodajemy do tabeli kolejne opcje do momentu napotkania dwóch kolejnych opcji z ofertą kupna równą zero. Podobnie postępujemy wybierając opcje *put*. Zaczynamy od opcji *put* z ceną wykonania niższą od  $K_0$  i niezerową ofertą kupna, a następnie dodajemy do tabeli kolejne opcje *put* do momentu napotkania dwóch kolejnych opcji z ofertą kupna równą zero. W tabelce umieszczamy cenę środkową dla wybranego rodzaju opcji, a dla opcji z ceną wykonania  $K_0$  – połowę sumy pomiędzy ceną środkową opcji *call* i *put*. Tab. A.2. prezentuje powyżej opisany sposób wyboru odpowiednich opcji do dalszych obliczeń.

**Tab. A.2.** Przedstawienie opcji wykorzystanych w procesie wyznaczania indeksu VIW20.<sup>a</sup>

Seria A			Seria B		
Cena Wykonania	Typ opcji	Cena środkowa	Cena Wykonania	Typ opcji	Cena środkowa
3500	Put	66.9	3500	Put	156.3
3600	Put	92.2	3600	Put	189.3
3700	Put	124.5	3700	Put	226.9
3800	Call i Put	153.9	3800	Call i Put	261.9
3900	Call	97.75	3900	Call	206.5
4000	Call	74.4	4000	Call	169.8
4100	Call	44.3	4100	Call	139.3

<sup>a</sup> Obliczenia dla hipotetycznego dnia notowań w listopadzie 2007 roku, godz. 10.00, indeks WIG20 = 3806.

**KROK 2.** Wyznaczamy zmienność dla opcji o krótszym i dłuższym terminie wygaśnięcia.

Stosujemy wzór (9) do danych z tab. A.2. w celu obliczenia zmienności dla krótszego i dłuższego terminu wygaśnięcia:  $T_A$  (seria A) i  $T_B$  (seria B):

$$\sigma_A^2 = \frac{2}{T_A} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT_A} * Q(K_i) - \frac{1}{T_A} \left[ \frac{F_A}{K_0} - 1 \right]^2$$

$$\sigma_B^2 = \frac{2}{T_B} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT_B} * Q(K_i) - \frac{1}{T_B} \left[ \frac{F_B}{K_0} - 1 \right]^2$$

Indeks VIW20 bazuje na informacji zawartej we wszystkich kwotowaniach opcji wykorzystanych w procesie obliczeniowym. Wpływ każdej z opcji na poziom indeksu jest proporcjonalny do ceny tej opcji i odwrotnie proporcjonalny do ceny wykonania danej opcji, np. wpływ opcji z ceną wykonania 3900 na zmienność dla krótszego terminu jest następująca:

$$\frac{\Delta K_{3900\_Call}}{K_{3900\_Call}^2} e^{R*T_A} * Q(3900\_Call)^{16}$$

A po wyznaczeniu powyższej zależności otrzymujemy wpływ opcji z daną ceną wykonania na końcową wartość zmienności dla danego terminu wygaśnięcia:

$$\frac{\Delta K_{3900\_Call}}{K_{3900\_Call}^2} e^{R*T_A} * Q(3900\_Call) = \frac{100}{3900^2} e^{(0.051*0.121289954)} * 97.75 = 0.000647$$

Podobne obliczenia przeprowadzamy dla wszystkich opcji z tab. A.2. Następnie sumujemy odpowiednie wartości dla serii A i mnożymy przez czynnik  $2/T$ . Podobne obliczenia przeprowadzamy

<sup>16</sup>  $\Delta K_i$  oznacza połowę odległości pomiędzy cenami wykonania na lewo i na prawo od  $K_i$ , z wyjątkiem dwóch skrajnych cen wykonania branych pod uwagę w obliczeniach. Dla max. i min. K,  $\Delta K_i$  oznacza różnicę pomiędzy  $K_i$  a sąsiednią ceną wykonania, np.  $\Delta K_{4100\_Call} = 4000 - 3900 = 100$ .

dla serii B. W kolejnym kroku obliczamy wartość:  $\frac{1}{T} \left[ \frac{F}{K_0} - 1 \right]^2$  zarówno dla krótszego, jak i dłuższego terminu wygaśnięcia. W tab. A.3. podajemy wyniki powyższych obliczeń oraz dalsze obliczenia prowadzące do wyznaczenia  $\sigma_A^2$  i  $\sigma_B^2$ .

**Tab. A.3.** Prezentacja sposobu wyznaczenia  $\sigma_A^2$  i  $\sigma_B^2$ .<sup>a</sup>

Seria A				Seria B			
Cena wykonania	Typ opcji	Cena środkowa	Wpływ	Cena wykonania	Typ opcji	Cena środkowa	Wpływ
3500	Put	66.9	0.000550	3500	Put	156.3	0.001300
3600	Put	92.2	0.000716	3600	Put	189.3	0.001489
3700	Put	124.5	0.000915	3700	Put	226.9	0.001689
3800	Call i Put	153.9	0.001072	3800	Call i Put	261.9	0.001848
3900	Call	97.75	0.000647	3900	Call	206.5	0.001384
4000	Call	74.4	0.000468	4000	Call	169.8	0.001081
4100	Call	44.3	0.000265	4100	Call	139.3	0.000844
$\frac{2}{T_A} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT_A} * Q(K_i)$			0.076346	$\frac{2}{T_B} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT_B} * Q(K_i)$			0.051996
$\frac{1}{T_A} \left[ \frac{F_A}{K_0} - 1 \right]^2 = \frac{1}{0.121289954} * \left[ \frac{3821.48}{3800} - 1 \right]^2$			0.000263	$\frac{1}{T_B} \left[ \frac{F_B}{K_0} - 1 \right]^2 = \frac{1}{0.370606022} * \left[ \frac{3814.67}{3800} - 1 \right]^2$			0.000040
$\sigma_A^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT_A} * Q(K_i) - \frac{1}{T_A} \left[ \frac{F_A}{K_0} - 1 \right]^2$			0.076346 - 0.000263 = 0.076083	$\sigma_B^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT_B} * Q(K_i) - \frac{1}{T_B} \left[ \frac{F_B}{K_0} - 1 \right]^2$			0.051996 - 0.000040 = 0.051956

<sup>a</sup> Obliczenia dla hipotetycznego dnia notowań w listopadzie 2007 roku, godz. 10.00, indeks WIG20 = 3806.

**KROK 3.** Interpolujemy  $\sigma_A^2$  i  $\sigma_B^2$  w celu otrzymania jednej wartości indeksu zmienności o stałej długości czasu do terminu wygaśnięcia wynoszącej 91 dni (odpowiednik 3 miesięcy). Ponadto wyciągamy pierwiastek z otrzymanej wartości, a w kolejnym kroku mnożymy ją przez 100 i w ten sposób otrzymujemy końcową wartość VIW20.

$$\sigma = \sqrt{\left\{ T_A \sigma_A^2 \left[ \frac{N_{T_B} - N_{91}}{N_{T_B} - N_{T_A}} \right] + T_B \sigma_B^2 \left[ \frac{N_{91} - N_{T_A}}{N_{T_B} - N_{T_A}} \right] \right\} * \frac{N_{365}}{N_{91}}} \quad (A.6)$$

gdzie:

- $N_{T_A}$  – liczba minut do wygaśnięcia serii A o krótszym terminie wygaśnięcia,
- $N_{T_B}$  – liczba minut do wygaśnięcia serii B o dłuższym terminie wygaśnięcia,
- $N_{91}$  – liczba minut w ciągu 91 dni ( $91 * 1440 = 131\ 040$ ),
- $N_{365}$  – liczba minut w ciągu 365 dni ( $365 * 1440 = 525\ 600$ ).

$$VIW20 = 100 * \sigma \quad (A.7)$$

Dla naszych danych powyższe obliczenia i końcowa wartość  $\sigma$  oraz indeksu VIW20 przedstawia się następująco:

$$\sigma = \sqrt{\left\{ 0.121289954 * 0.076083 * \left[ \frac{194790 - 131040}{194790 - 63750} \right] + 0.370606022 * 0.051996 * \left[ \frac{131040 - 63750}{194790 - 63750} \right] \right\} * \frac{525600}{194790}}$$

$$\sigma = 0.197008$$

$$VIW20 = 100 * \sigma = 19.70$$

## Literatura:

1. Ait-Sahalia, Y., Mykland, P.A., Zhang, L., 2005, How often to sample a continuous-time process in the presence of market microstructure noise, *Review of Financial Studies* 18, 351–416.
2. Andersen T.G., Bollerslev T., 1998, Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts, *International Economic Review* 39, 885-905.
3. Andersen T., Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X and Labys P., 1999a, Realized volatility and correlation, Manuscript in progress.
4. Andersen, T., Bollerslev T., Diebold F., and P. Labys, 2000, Exchange rate returns standardized by realized Volatility are (nearly) Gaussian, *Multinational Finance Journal* 4, 159-179.
5. Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X, Ebens H., 2001a, The Distribution of Realized Stock Return Volatility, *Journal of Financial Economics* 61, 43-76.
6. Andersen, T., Bollerslev T., Diebold F., and P. Labys, 2001b, The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility, *Journal of American Statistical Association* 96, 42-55.
7. Arak M., Mijid N., 2006, The VIX and VXN volatility measures: Fear gauges or forecasts?, *Derivatives Use, Trading & Regulation* 12, 14-27.
8. Baillie R.T., Bollerslev T., Mikkelsen H.O., 1996, Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* 74, 3-30.
9. Becker R., Clements A. E., White S.I., 2006, On the informational efficiency of S&P500 implied volatility, *North American Journal of Economics and Finance* 17, 139-153.
10. Black, F., and Scholes, M., 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
11. Black F., 1976, Studies of stock market volatility changes, *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 177-181.
12. Campbell, J., Hentschel L., 1992, No news is good news: an asymmetric model changing volatility in stock returns, *Journal of Financial Economics* 31, 281-318.
13. Derman E., Demeterfi K, Kamal M., Zou J., 1999, More than you ever wanted to know about volatility swaps, *Quantitative Strategies Research Notes*, Goldman Sachs.
14. Ebens H., 1999, Realized stock index volatility, Working Paper no. 420, Department of Economics, John Hopkins University, Baltimore.
15. Garman M., Klass M., 1980, On the estimation of security price volatilities from historical data, *The Journal of Business* 53, 67-78.
16. Giot P., Laurent S., 2004, Modelling daily Value-at-Risk using realized volatility and ARCH type models, *Journal of Empirical Finance* 11(3), 379-398.
17. Guide to volatility indices of Deutsche Borse, 2007, version 2.4, Deutsche Borse.
18. Hansen, P.R., Lunde, A., 2006a, Consistent ranking of volatility models, *Journal of Econometrics* 131, 97–121.
19. Heston, S.L., 1993, A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies* 6, 327-343.
20. Hull J., White A., 1987, The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance* 42, 281-300.
21. Kim J., Kim W., Kim K., 2006, Implied volatility using variance decomposition method, MPRA Paper 936/27, Munich.
22. Lowenstein R., 2000, *When genius failed. The rise and fall of Long-Term Capital Management*, Random House, New York.
23. Martens M., Dijk van D., 2007, Measuring volatility with the realized range, *Journal of Econometrics* 138, 181-207.
24. Merton, R., 1980, On estimating the expected return on the market. An exploratory investigation, *Journal of Financial Economics* 8, 323-361.
25. Parkinson, M., 1980. The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. *Journal of Business* 53, 61–65.
26. Poon S., Granger C.W.J., 2003, Forecasting volatility in financial markets: A review, *Journal of Economic Literature* 41, 478-539.
27. Poteshman A.M., 2000, Forecasting future volatility from option prices, Working Paper, University of Illinois at Urbana-Champaign.

28. Rogers L.C.G., Satchell S.E., 1991, Estimating variance from high, low and closing prices, *The Annals of Applied Probability* 1, 504-512.
29. Shu J., Zhang J., 2003, The relationship between implied and realized volatility of S&P 500 index, *Wilmott Magazine*.
30. Shu J., Zhang J., 2006, Testing range estimators of historical volatility, *The Journal of Futures Markets* 26, 297-313.
31. Ślepaczuk R., Zakrzewski G., 2007, How Should We Measure Volatility Estimators?, manuscript in progress.
32. Taylor S., Areal N.M.P.C., 2002, The realized volatility of FTSE-100 futures prices, *Journal of Future Markets* 22, 627-648.
33. Taylor S.J., Xu X., 1997, The incremental volatility information in one million foreign exchange quotations, *Journal of Empirical Finance* 4, 317-340.
34. VIX White Paper, 2003, CBOE Volatility Index, Chicago.
35. Yang D., Zhang Q., 2000, Drift-independent volatility estimation based on high, low, open and close prices, *The Journal of Business* 73, 477-491.
36. Zhang J., Zhu Y., 2006, VIX Futures, *The Journal of Futures Markets* 26, 521-531.