

Marcin Smółka

Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania z siedzibą w Rzeszowie

O modulacji pewnych cech opcji ze względu na: rozkład źródła ryzyka i (de)rekursywację

1. Wprowadzenie

Niech wszystkie instrumenty finansowe utworzą pewien zbiór oznaczony jako \mathbb{I} , stanowiący nadzbiór dla zbiorów: instrumentów bazowych \mathbb{I}^α (in. źródeł ryzyka) oraz instrumentów pochodnych \mathbb{I}^β , tak że $\mathbb{I} = \mathbb{I}^\alpha \cup \mathbb{I}^\beta$. Spośród elementów zbioru \mathbb{I}^α wybierzmy jedno źródło ryzyka I^α , tj. $I^\alpha \in \mathbb{I}^\alpha$, natomiast spośród elementów zbioru \mathbb{I}^β wybierzmy podzbiór opcji $\mathbb{I}^{\beta,o}$, w którym pewien reprezentatywny egzemplarz opcji określane będzie jako $I^{\beta,o}$, gdzie $I^{\beta,o} \in \mathbb{I}^{\beta,o} \subset \mathbb{I}^\beta$.

Budowa derywatów opcyjnych stanowi wyzwanie inżynierskie zarówno na etapie projektowania tychże instrumentów i ich adaptacji wobec zbioru źródeł ryzyka \mathbb{I}^α , jak i wiązania z innymi obiektami. Zwłaszcza ze względu na praktycznie nieograniczone możliwości konstrukcji instrumentów pochodnych. Skutkuje ponadto postawieniem odpowiednich wymagań przede wszystkim wobec metod numerycznych. Bogatą reprezentację tej grupy metod stanowi przybliżona w pracy gałąź metod siatkowych opartych na konfigurowalnych, wielomianowych rozkładach zmiennych losowych determinujących trajektorie źródła ryzyka, którym w przypadku opcji $I^{\beta,o}$ jest reprezentacja zbioru \mathbb{I}^α – tu w postaci $-I^\alpha$.

Z perspektywy metody siatkowej, określonej za pomocą i -tych punktów czasu $t(i)$ oraz j -tych realizacji źródła ryzyka i wycen opcji wprowadzenie różnych postaci rozkładu tych zmiennych losowych udostępnia możliwość modulacji cech opcji, a więc zmiany pewnych cech opcji wywołanej zmianą konfiguracji siatki.

Istotnym obszarem badawczym jest także i definiowanie formy procesów zmierzających do wyznaczenia cech opcji rekursywnej oraz iteracyjnej. W pierwszym przypadku procesy te przebiegają począwszy od dalszych, a zakończywszy na bliższych węzłach początkowemu punkcie czasu siatki, co umożliwi weryfikację możliwości wykonawczych opcji (sprawdzenie opłacalności realizacji opcji w danym punkcie).

W przypadku drugim procesy te charakteryzuje odwrotny kierunek działania – w konsekwencji nie jest możliwe przeprowadzenie wspomnianej weryfikacji.

Załóżmy, iż na potrzeby niniejszej pracy reprezentację zbioru badanych cech opcji wystarczająco opisuje: czas realizacji T (sprawność pewnej formy algorytmu obsługi opcji), liczba węzłów opisujących siatkę dla wszystkich m -punktach czasu $\sum_{i=1}^m n_{t(i)}$ (gdzie $n_{t(i)}$ – liczba węzłów w pewnym punkcie czasu), wartość pewnej realizacji funkcji wyceny opcji $V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})$ oraz zmienność wartości tejże opisana odchyleniem standardowym $\sigma_{V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})}$.

W tej perspektywie istotne okazuje się wprowadzenie okresu życia opcji $\tau(I^{\beta,o})$ (nazwa potoczna, ściślej długości tegoż), dla którego ma zostać skonfigurowana siatka wielomianowa, a dalej tzw. stylu $\lambda^\eta(I^{\beta,o})$, tj. cechy opcji wskazującej na jej własności wykonawcze, gdzie $\eta = E, B, O, A$. Styl opcji jednoznacznie określa, które spośród wszystkich $t(i)$ -punktów czasowych siatki (gdzie $i = \{1, 2, \dots, m\}$) charakteryzuje możliwość wykonania instrumentu. Dalej punkty te oznaczono jako $t(i^*)$, przyjmując, że każdą opcję może charakteryzować styl w 4 wariantach:

- styl europejski $\lambda^E(I^{\beta,o})$, wskazuje na możliwość wykonania opcji w jednym, niepoczątkowym punkcie czasu siatki $t(i^*)$ takim że $i^* = i > 1$,
- styl bermudzki $\lambda^B(I^{\beta,o})$, wskazuje na możliwość wykonania opcji w nienastępujących po sobie, dowolnie oddalonych od siebie punktach czasu siatki, tj. takich $t(i^*)$ że $i^* = i \geq 1$, $\Delta t(i^*) > \frac{\tau(I^{\beta,o})}{m}$,
- styl okienkowy $\lambda^O(I^{\beta,o})$, wskazuje na możliwość wykonania opcji w następujących po sobie punktach czasu siatki, licząc od pewnego niepoczątkowego punktu, tj. takich $t(i^*)$ że $i^* = i > 1$, $\Delta t(i^*) = \frac{\tau(I^{\beta,o})}{m}$,

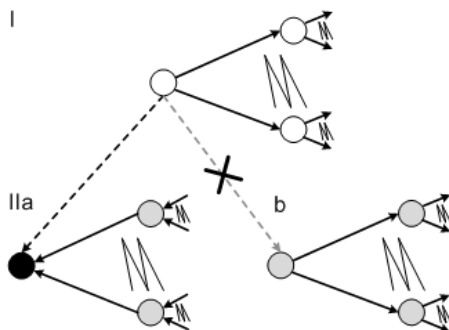
- styl amerykański $\lambda^A(I^{\beta,o})$, wskazuje na możliwość wykonania opcji w dowolnych punktach czasu siatki, tj. takich $t(i^*)$ że $i^* = i \geq 1$, $\Delta t(i^*) = \frac{\tau(I^{\beta,o})}{m}$.

Przedstawione rozważania pozwalają na sformułowanie ogólnej definicji opcji, dla której kluczowy, pierwszy węzeł siatki uwzględniający docelowo wszystkie własności instrumentu dla całej siatki zidentyfikowano poprzez liczniki: $i, j = 1$. Definicja ta może zostać określona za pomocą siódemki:

$$I^{\beta,o} = \left\langle \mathbb{I}^\alpha, \tau(I^{\beta,o}), \lambda^\eta(I^{\beta,o}), T, \sum_{i=1}^m n_{t(i)}, V_{t(1)}^1(I^{\beta,o}), \sigma_{V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})} \right\rangle. \quad (1)$$

Zauważmy, że pozwala ona uniknąć potrzeby oznaczania opcji jako waniliowej lub egzotycznej (pomiędzy którymi wraz z rozwojem instrumentów opcyjnych zarysowuje się coraz mniej jednoznaczna granica). Nie ingeruje też w treść zbioru źródeł ryzyka opcji \mathbb{I}^α , którego analiza nie jest przedmiotem pracy. Jednocześnie definicja ta nie obejmuje – poza: $V_{t(1)}^1(I^{\beta,o}), \sigma_{V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})}$ – innych danych o charakterze ekonomicznym, co stanowi jej kluczowy atut, pozwalając skoncentrować się na zbadaniu technicznych własności opcyjnych instrumentów finansowych.

Tak zakreślony przedmiot dociekań badawczych wymaga skonstruowania odpowiednich narzędzi, które umożliwią ich przeprowadzenie. Stanowią je pewne procesy w ramach algorytmu obsługi opcji wymagające zbadania w zadanych warunkach układu oceny (konfiguracja rozkładu prawdopodobieństwa, forma procesów), przy czym okazuje się, że warstwa metodyczna rozważanej koncepcji siatki wielomianowej jest na tyle uniwersalna, że do etapu wyznaczenia wartości funkcji wypłaty opcyjnej (dla każdego węzła siatki) procesy obliczeń mogą przebiegać tak samo (niezależnie od formy algorytmu). I takie też założenie zastosowano w niniejszej pracy, określając wspomniane procesy mianem I etapu algorytmu. Umożliwiło to zawężenie obszaru poszukiwań do badań nad konstrukcją II etapu algorytmu, tj. w rozważanym przypadku do procesu ustalania wartości funkcji wyceny opcji w kluczowym węźle siatki $V_{t(i=1)}^{j=1}(I^{\beta,o})$, a więc węźle uwzględniającym wpływ realizacji źródła ryzyka $V_{t(i)}^j(I^\alpha)$ na lokalne wartości funkcji wypłaty dla kontekstu wszystkich węzłów siatki (gdzie $i = \{1, 2, \dots, m\}$, $j = \{1, 2, \dots, n_{t(i)}\}$). Dopiero bowiem uruchomienie obydwu etapów algorytmu umożliwia wyznaczenie definicji opcji (1).



Rysunek 1: Sekwencja przejść między stanami w etapach algorytmu obsługi opcji: I (do wyznaczenia wartości lokalnych wypłat z opcji), II (do wyznaczenia wartości funkcji wyceny opcji). IIa – forma rekursywna z weryfikacją lokalnych możliwości wykonawczych w węźle czarnym, tj. z sięgnięciem do węzła etapu I; IIb – forma iteracyjna; obydwie – z zachowaniem odpowiedniości węzłów. Źródło: Opracowanie własne.

2. Dyskretyzacja czasu analizy źródła ryzyka

Zasadniczym elementem konstrukcji opcji $I^{\beta,o}$ jest mechanizm analizy trajektorii jej źródeł ryzyka \mathbb{I}^α , tj. realizacji cen każdego z tworzących je instrumentów bazowych opcji, np. $V_t(I^\alpha)$ w ogólnej notacji niezależnej od wprowadzonej metody siatki. Obok indywidualnych własności opcji determinuje on możliwość określania wartości funkcji wypłaty opcyjnej i docelowo wpływa na wartość funkcji wyceny opcji. U podstaw tego mechanizmu leży identyfikacja pewnych punktów t na osi czasu, dla których dokonuje się oceny dynamiki oczekiwanych względnych stóp zwrotu z instrumentu bazowego $\frac{dV_t(I^\alpha)}{V_t(I^\alpha)}$, np. w celu przeprowadzenia projekcji cen tychże instrumentów.

Rozpocznijmy zatem analizę od podziału okresu życia pewnej opcji $\tau(I^{\beta,o})$ na nieskończenie małe okresy dt , tak że:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\tau(I^{\beta,o})}{dt} = \alpha, \quad (2)$$

gdzie zakładamy, że dla $I^\alpha \in \mathbb{I}^\alpha$ zachodzi $\tau(I^\alpha) = \tau(I^{\beta,o})$. Dysponując nieskończenie dużą liczbą punktów analizy t , uzyskujemy możliwość wykładniczego sformułowania ceny instrumentu bazowego dla opcji po upływie okresu $dt - V_{t+dt}(I^\alpha)$:

$$V_{t+dt}(I^\alpha) = V_t(I^\alpha) \exp(X_{V_t(I^\alpha)}), \quad (3)$$

gdzie wyjściowa cena $V_t(I^\alpha) > 0$ oraz $X_{V_t(I^\alpha)}$ reprezentuje oczekiwany absolutny przyrost wartości zmiennej $V_t(I^\alpha)$ w okresie dt odpowiadający przekształceniu:

$$X_{V_t(I^\alpha)} = \ln V_{t+dt}(I^\alpha) - \ln V_t(I^\alpha), \quad (4)$$

a tym samym normalnemu rozkładowi prawdopodobieństwa logarytmów z cen i ich logarytmicznym stopom zwrotu, przy czym ze względu na własność, wg której dla nieskończenie małych okresów dt log-zwroty zbiegają do względnych stóp zwrotu i

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \ln \frac{V_{t+dt}(I^\alpha)}{V_t(I^\alpha)} = \frac{V_{t+dt}(I^\alpha) - V_t(I^\alpha)}{V_t(I^\alpha)} \quad (5)$$

oraz założenie uzyskania w warunkach (2) wystarczająco dobrych przybliżeń, uzyskuje się uprawnienie do określania $X_{V_t(I^\alpha)}$ intuicyjnym pojęciem stopy zwrotu.

Jak zatem kształtować się będzie stopa zwrotu w t -punktach czasu? Odnalezienie odpowiedzi na to pytanie wymaga przyjęcia co najmniej trzech dodatkowych założeń poza wynikającą z logarytmicznego rozkładu prawdopodobieństwa niezależnością obserwacji zmiennej $V_t(I^\alpha)$ od historii ewolucji ich wartości (zgodność z procesem Markowa).

Po pierwsze, wymaga wprowadzenia pojęcia wolnej od ryzyka względnej stopy zwrotu $r_t^{(e)}$ jako minimum oczekiwań zgłaszanych przez uczestników danego rynku $e = \{1, 2, \dots\}$ wobec zbioru instrumentów bazowych \mathbb{I}^α . Po drugie, wymaga oznaczenia zmienności stóp zwrotu $\sigma_{V_t(I^\alpha)}$ realizowanych w kontekście konkretnych instrumentów ze wspomnianej klasy. Po trzecie, wymaga wprowadzenia pomocniczej zmiennej losowej z definiowalnego rozkładu $v_t \sim \phi_t(\mu_{v_t} dt; \sigma_{v_t} \sqrt{dt})$, która nada losowy charakter zmiennej $X_{V_t(I^\alpha)}$, a dalej $V_t(I^\alpha)$.

Uwzględnienie tych trzech założeń umożliwia rozpoczęcie poszukiwań ewolucji oczekiwanej stopy zwrotu i zastosowania odpowiedniego równania stochastycznego, np. na podstawie lematu Kiyoshi Ito:

$$\begin{aligned} X_{V_t(I^\alpha)} = & \left(\frac{\partial \ln V_t(I^\alpha)}{\partial V_t(I^\alpha)} r_t^{(e)} V_t(I^\alpha) + \frac{\partial \ln V_t(I^\alpha)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln V_t(I^\alpha)}{\partial V_t(I^\alpha)^2} \sigma_{V_t(I^\alpha)}^2 V_t(I^\alpha)^2 \right) dt + \\ & + \frac{\partial \ln V_t(I^\alpha)}{\partial V_t(I^\alpha)} \sigma_{V_t(I^\alpha)} V_t(I^\alpha) v_t \sqrt{dt}, \end{aligned}$$

które po dokonaniu odpowiednich podstawień:

$$X_{V_t(I^\alpha)} = \left(\frac{1}{V_t(I^\alpha)} r_t^{(e)} V_t(I^\alpha) + 0 - \frac{1}{2} \frac{1}{V_t(I^\alpha)^2} \sigma_{V_t(I^\alpha)}^2 V_t(I^\alpha)^2 \right) dt + \frac{1}{V_t(I^\alpha)} \sigma_{V_t(I^\alpha)} V_t(I^\alpha) v_t \sqrt{dt}$$

i uproszczeń przyjmuje postać:

$$X_{V_t(I^\alpha)} = \left(r_t^{(e)} - \frac{\sigma_{V_t(I^\alpha)}^2}{2} \right) dt + \sigma_{V_t(I^\alpha)} v_t \sqrt{dt}. \quad (6)$$

Równanie to potwierdza niezależność oczekiwanej stopy zwrotu od wyjściowej ceny instrumentu $V_t(I^\alpha)$ oraz w przyjętych warunkach oznacza, że każdorazowe zaangażowanie w instrument bazowy bez względu na jego wyjściową wartość wymaga od uczestników rynku kierowania się taką samą dla zbioru instrumentów \mathbb{I}^α , oczekiwaną wolną stopą zwrotu oraz zindywidualizowanym ryzykiem instrumentu (przedmiotu zaangażowania). Pamiętając o tych własnościach, prawą stronę równania (6) można wyrazić za pomocą notacji dryfu $\mu_{V_t(I^\alpha)}$ oraz procesu Wienera dW_t :

$$X_{V_t(I^\alpha)} = \mu_{V_t(I^\alpha)} dt + \sigma_{V_t(I^\alpha)} dW_t \quad (7)$$

lub

$$dV_t(I^\alpha) = \mu_{V_t(I^\alpha)} V_t(I^\alpha) dt + \sigma_{V_t(I^\alpha)} V_t(I^\alpha) dW_t. \quad (8)$$

Można zatem stwierdzić, że ewolucję oczekiwanej stopy zwrotu opisuje $X_{V_t(I^\alpha)} \sim \phi_t(\mu_{V_t(I^\alpha)} dt; \sigma_{V_t(I^\alpha)} \sqrt{dt})$, tj. geometryczny ruch Browna o zindywidualizowanych (do kontekstu instrumentu $V_t(I^\alpha)$) poziomach oczekiwanej stopy zwrotu oraz zmienności wyrażonych w ujęciach procentowym (7) lub nominalnym (8).

Dokonawszy rewizji podstaw mechanizmu kształtowania oczekiwanej stopy zwrotu dla instrumentu bazowego I^α , należy zwrócić uwagę na pewien kluczowy z punktu widzenia użyteczności opisywanej metody aspekt. Analiza środowiska określonego przez (e) , tj. pewnego rynku, wymaga bowiem zastosowania dyskretyzacji modelu obliczeń i wskazuje na potrzebę dokonania wyboru pewnych identyfikatorów dla przedziałów analizy $\Delta t(i)$ i punktów czasu $t(i)$ spośród okresu życia opcji $\tau(I^{\beta, \alpha})$ (gdzie i - oznacza identyfikator).

Przy czym nie istnieje uniwersalny przepis jego przeprowadzania, co wynika ze zróżnicowania specyfiki środowisk oraz stosowanej do obliczeń infrastruktury sprzętowej. Z tego powodu teoretyczna realizacja tegoż wyboru może zostać oparta na aksjomacie wyboru Ernsta Zermelo i pewnej heurystyce, którą określono dalej jako $@(\cdot)$, przy czym można założyć, że będzie ona przeprowadzać trzy operacje.

Po pierwsze, dokona wyznaczenia elementów wektorów: x, y . Pierwszy z wektorów reprezentować będzie numery komunikatów (odbior, przetworzenie, przekaz danych) takie że $x = \{1, 2, \dots, X \leq X_e\}$, X_e - najwyższy numer komunikatu w danym przedziale czasu i w danym środowisku (wskazujący maksymalną liczbę komunikatów możliwych do zrealizowania w pewnej jednostce czasu w warunkach e -rynku). Drugi wektor opisywać będzie numery przedziałów czasu, w których możliwe jest wykonanie opcji, gdzie Y - numer ostatniego przedziału, w którym możliwe jest wykonanie opcji $Y \in y$. Po drugie, doprowadzi do niefunkcyjnego przyporządkowania wszystkich elementów wektora x do każdego z elementów wektora y . Po trzecie, dobrze uporządkuje (na podstawie twierdzenia, którego podstawę stanowi aksjomat wyboru) rozważane zbiory (umożliwi identyfikację najmniejszych elementów tych zbiorów). W konsekwencji pozwoli na zdefiniowanie wektora numerów przedziałów analizy:

$$i^* \stackrel{@(\cdot)}{=} \{x, y \neq \emptyset \wedge x \mapsto y\}, \quad (9)$$

w których możliwe będzie wykonanie opcji $\Delta t(i^*)$, gdzie element o najwyższej wartości tegoż wektora $\max(i^*) = m$ i pozwala na ograniczenie zbioru wartości dla licznika $i = \{1, 2, \dots, m\}$, czyli wektora numerów wszystkich przedziałów analizy $\Delta t(i)$, tj. niezależnie od własności wykonawczych danej opcji.

Ze względu na powyższe oraz praktyczne podejście do realizacji opisanego problemu wyboru (determinowane techniczno-technologicznymi możliwościami analizy danych oraz oceną aktywności danego środowiska) można zastanowić się nad egzemplifikacją elementów wektora y . Mogą one określać np. numery dni, w których możliwe jest wykonanie opcji. W tym kontekście przyporządkowanie: $x \mapsto y$, określi dobrze uporządkowany zbiór numerów komunikatów możliwych do zrealizowania w wyznaczonym do tego dobrze uporządkowanym zbiorze ponumerowanych dni.

W konsekwencji powyższych rozważań dynamika źródła ryzyka po dyskretyzacji czasu i odpowiednim ponumerowaniu przedziałów analizy $\Delta t(i)$, a tym samym identyfikacji punktów czasu $t(i)$, może zostać określona jako:

$$X_{V_{t(i)}(I^\alpha)} = \mu_{V_{t(i)}(I^\alpha)} \Delta t(i) + \sigma_{V_{t(i)}(I^\alpha)} \Delta W_{t(i)}, \quad (10)$$

natomiast cena instrumentu bazowego $V_{t(i)}(I^\alpha)$ dla opcji po upływie okresu $\Delta t(i)$ to:

$$V_{t(i+1)}(I^\alpha) = V_{t(i)}(I^\alpha) \exp(X_{V_{t(i)}(I^\alpha)}), \quad (11)$$

gdzie $1 \leq i < m$, co odpowiada funkcji projekcji wartości źródła ryzyka, tj. ceny hipotetycznego instrumentu bazowego.

3. Konfiguracja siatki

Dysponując sformułowaną ogólną definicją funkcji projekcji (11), można zastanowić się nad przebiegiem trajektorii cen instrumentu I^α w ujęciu wielomianowym. W tym świetle postać tejszej funkcji wymaga rozszerzenia do obliczeń prowadzonych na przestrzeni j -tych węzłów (in. stanów) w każdym ze zidentyfikowanych wcześniej punktów czasu $t(i)$. Prowadzi do zmiany jej notacji do postaci $V_{t(i)}^j(I^\alpha)$, gdzie $j = \{1, 2, \dots, n_{t(i)}\}$. Jednocześnie pozwala na zbadanie wpływu wariantu konfiguracji rozkładu każdego ze źródeł ryzyka $I^\alpha \in \mathbb{I}^\alpha$ na cechy definicji opcji (1). I stawia kolejny krok w ewolucji podstaw metodycznych gałęzi metod siatkowych [1, s. 229-263; 2, s. 545-547].

A zatem z każdego j -tego węzła osadzonego w punkcie $t(1 \leq i < m)$, który reprezentuje wariant ceny instrumentu bazowego $V_{t(i)}^j(I^\alpha)$, można dokonywać projekcji L -stanów tej zmiennej w węzłach bezpośrednio z nim spokrewnionych, tj. zlokalizowanych w punkcie czasu $t(i+1)$. Tak skonfigurowana liczba stanów odpowiada liczbie jednomianów składających się na wielomian charakteryzujący wszystkie węzły przypadające na punkty czasu $t(i)$:

$$n_{t(i)} = L + (i - 2)(L - 1). \tag{12}$$

Można ją wyznaczyć poprzez modyfikację definicji dynamiki źródła ryzyka (10) do postaci $X_{V_{t(i)}^j(I^\alpha)}^{(l)}$, gdzie $l = \{1, 2, \dots, L\}$ oraz uszczegółowienie definicji procesu Wienera o wariantową postać zmiennej losowej $v_{t(i)}^{(l)}$, czyli $\Delta W_{t(i)}^{(l)} = v_{t(i)}^{(l)} \sqrt{\Delta t(i)}$, stąd też dla kontekstu jednowymiarowej siatki dynamikę źródła ryzyka opisuje równanie:

$$X_{V_{t(i)}^j(I^\alpha)}^{(l)} = \mu_{V_{t(i)}^j(I^\alpha)} \Delta t(i) + \sigma_{V_{t(i)}^j(I^\alpha)} \Delta W_{t(i)}^{(l)}, \tag{13}$$

zaś funkcję projekcji ceny każdego źródła ryzyka dla $1 \leq i < m$ równanie:

$$V_{t(i+1)}^j(I^\alpha) = V_{t(i)}^j(I^\alpha) \exp(X_{V_{t(i)}^j(I^\alpha)}^{(l)}). \tag{14}$$

W celu zapewnienia wariantowości definicji (13) konieczne jest dokonanie wektoryzacji wspomnianej zmiennej losowej $\Upsilon = \{v_{t(i)}^{(l)}\}_{l=1}^L$. Wyznaczenie wartości elementów tegoż wektora możliwe jest poprzez sformułowanie osadzonego w warunkach prawdopodobieństwa $P = \{p_l\}_{l=1}^L$ układu równań:

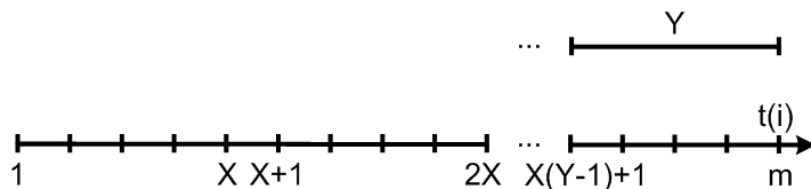
$$\underbrace{\begin{bmatrix} U \\ \Upsilon^k \end{bmatrix}}_{(L+2) \times (L)} \underbrace{P^T}_{(L) \times (1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ M_k^{(\Upsilon)} \end{bmatrix}}_{(L+2) \times (1)} \tag{15}$$

z wektorami niewiadomych: P i Υ spełniających warunki: $\sum_{l=1}^L p_l = 1$ i $\Delta v_{t(i)}^{(1 < l \leq L)} = v_{t(i)}^{(l)} - v_{t(i)}^{(l-1)}$ oraz z wiadomymi w postaci wektora jednostkowego $U = \{1\}_{l=1}^L$ i wektora $M_k^{(\Upsilon)}$ momentów centralnych dla elementów wektora Υ , gdzie $k = \{1, 2, \dots, L + 1\}$.

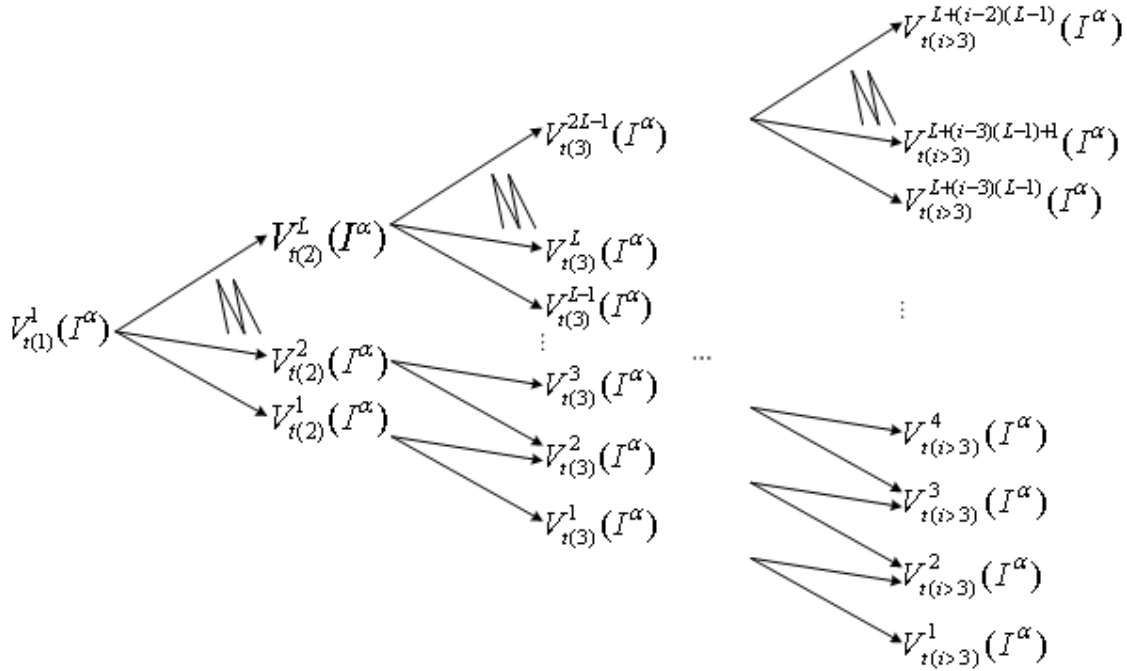
Można zauważyć, że to wspomniane warunki powodują zwiększenie liczby równań układu (15) o dwa – do $L+2$ równań. Natomiast k -te momenty centralne występują w liczbie o 1 większej od L i wyznaczone są za pomocą odpowiedniej funkcji tworzącej, przy czym dla celów niniejszej pracy zaproponowano zastosowanie jej wariantu dla symetrycznego rozkładu zmiennej losowej $v_{t(i)}^{(l)} \sim \phi(0, \sigma_{v_{t(i)}^{(l)}}^2 \Delta t(i))$:

$$M_k^{(\Upsilon)} = \begin{cases} 0 & \forall \frac{k}{2} \neq \mathbb{Z} \\ \prod_{g=1}^{k/2} (2g - 1) (\sigma_{v_{t(i)}^{(l)}} \sqrt{\Delta t(i)})^k & \forall \frac{k}{2} = \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{16}$$

Warto zauważyć, że zastosowanie definicji (16) w kontekście przyrostu ($\Delta v_{t(i)}^{(l)} = const$) w układzie (15) może posłużyć do zdefiniowania wartości pozostałych elementów wektora Υ za pomocą tylko dwóch wartości dla: $v_{t(i)}^{(1)}, v_{t(i)}^{(2)}$ (co istotnie skraca proces obliczeń).



Rysunek 2: Oś zdyskretyzowanego czasu analizy, tj. dobrze uporządkowanych $t(i)$ -punktów czasu wyznaczonych na podstawie aktywności pewnego e -rynku i własności techniczno-technologicznych infrastruktury stosowanej do obliczeń – odpowiednio X -liczba komunikatów możliwych do zrealizowania w każdej jednostce opisującej aktywność rynku, Y -numer ostatniego przedziału analizy, w którym można wykonać opcję (np. dnia). Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3: Projektacja wartości instrumentu bazowego $V_{t(i)}^j(I^\alpha)$ w konfigurowalnej siatce $t(i)$ -punktów czasu oraz j -tych węzłów. Źródło: Opracowanie własne.

Przydatne okazuje się również zastosowanie funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa:

$$B_{L,G} = \frac{G!}{\prod_{l=1}^L h_l!} \prod_{l=1}^L p_l^{h_l}, \quad (17)$$

gdzie: h_l -liczba ścieżek, z których każdą opisuje dany wariant poziomu prawdopodobieństwa – p_l , $G = \sum_{l=1}^L h_l$.

Dysponując trajektoriami określającymi cenę instrumentu bazowego w każdym z węzłów siatki $V_{t(i)}^j(I^\alpha)$ oraz prawdopodobieństwami ich realizacji w wektorze P można przejść do określenia funkcji wyceny opcji dla każdego węzła siatki takiej że $V_{t(i)}^j(I^\alpha) \mapsto V_{t(i)}^j(I^{\beta,o})$. Procesy wyceny realizowane przez tę funkcję mogą przebiegać na dwa zasadniczo różne sposoby.

Pierwszy wariant procesu wyceny opcji opiera się na wzorze:

$$V_{t(i-1)}^j(I^{\beta,o}) = \begin{cases} \max \left(V_{t(i-1)}^j(I^{\beta,o}); \exp(-r_{t(i)}^{(e)} \Delta t(i-1) P^T Z) \right) & \text{gdy } i > 1 \wedge t(i-1) = t(i^*), \\ \exp(-r_{t(i)}^{(e)} \Delta t(i-1) P^T Z) & \text{gdy } i > 1 \wedge t(i-1) \neq t(i^*) \end{cases} \quad (18a)$$

gdzie $Z = \{V_{t(i)}^j(I^{\beta,o})\}_{j=1}^{j+L-1}$, a zatem każdorazowo wymaga analizy wszystkich węzłów siatki.

Natomiast drugi proponowany wariant procesu wyceny opcji (nie zawsze wymagający analizy wszystkich węzłów siatki) opisuje wzór:

$$V_{t(i-s)}^j(I^{\beta,o}) = \begin{cases} \max \left(V_{t(i-s)}^j(I^{\beta,o}); \exp(-r_{t(i)}^{(e)} Q) \right) & \text{gdy } 1 < i > s \wedge t(i-s) = t(i^*), \\ \exp(-r_{t(i)}^{(e)} Q) & \text{gdy } 1 < i > s \wedge i-s = 1 \wedge t(1) \neq t(i^*) \end{cases} \quad (18b)$$

gdzie $Q = \Delta t(i-s) P^T Z$ lub $Q = u_{t(i)} \sum_{j=1}^{j+L-1} B_{L,G} V_{t(i)}^j(I^{\beta,o})$ dla $u_{t(i)} = t(i) - t(i-s) > \Delta t(i)$, zaś s – pewna zmienna. Przyjmuje ona wartość 1, gdy dwa sąsiadujące ze sobą punkty czasu ($t(i-1), t(i)$) opisują własności wykonawcze opcji bądź też własności wykonawcze charakteryzują tylko drugi z sąsiadujących punktów i jednocześnie drugi punkt czasu dla siatki wielomianowej ($t(i=2)$). Może również przyjmować wartości większe niż 1, gdy z dwóch sąsiadujących ze sobą punktów czasu wcześniejszy ($t(i-1)$) nie jest punktem, w którym można wykonać opcję, a późniejszy nie jest drugim punktem czasu dla siatki – ($t(i \neq 2)$), ale można w nim wykonać opcję. W takim przypadku s przyjmuje albo wartość

określającą liczbę punktów czasu, o którą należy się cofnąć do najbliższego wobec $t(i)$ punktu czasu, w którym możliwe jest wykonanie opcji, albo też jeżeli dla żadnego z poprzedzających punktów czasu nie przewidziano możliwości wykonania opcji, przyjmuje się, że $s = i - 1$.

Mając zdefiniowane obydwa warianty, należy podkreślić, iż w każdym z nich kluczowe okazuje się wyznaczenie tzw. wyceny bieżącej opcji – $V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})$ determinowanej własnościami opcji dla całej siatki wielomianowej i umożliwiającą zbadanie wyboru innych cech opcji z definicji (1).

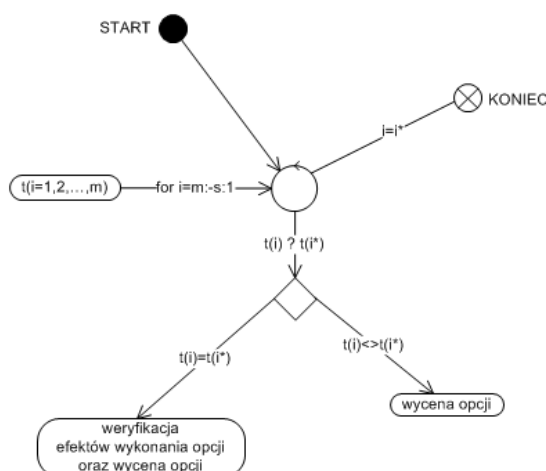
4. Koncepcja procesów wyceny w algorytmach

W niniejszej części skupiono się na przybliżeniu koncepcji procesów służących ustalaniu wartości funkcji wyceny opcji. Umożliwiły one ostateczne sformułowanie dwóch algorytmów, które różnią się podejściem do realizacji owych procesów, przy czym każdy z algorytmów prowadzi do zbadania podzbioru cech wchodzących w zakres definicji (1) dla opcji, jak: $T, \sum_{i=1}^m n_{t(i)}, V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})$, czyli ustala odpowiednio czas obliczeń, liczbę węzłów siatki wielomianowej analizowanych w trakcie obliczeń oraz wartość wyceny opcji. Natomiast analiza zmienności realizacji wyceny opcji jest konsekwencją uruchamiania algorytmów w różnych konfiguracjach siatki.

Każdy z algorytmów charakteryzuje się tą samą funkcją celu wykonywaną przy różnych podejściach: rekursywnym oraz rekursywno-iteracyjnym w zakresie uprzednio określonego etapu II obliczeń. W praktyce oznacza to ich zróżnicowanie ze względu na warunki równań: (18a) lub (18b).

Algorytm 1 przyjmuje w zakresie obejmującym procesy wyceny formę rekursywną [3, s. 29-30], prowadzącą do obliczeń w warunkach równania (18a). Wymaga analizy wszystkich $n_{t(i)}$ węzłów siatki wielomianowej we wszystkich jej punktach czasu, począwszy od węzłów przypisanych do końcowego punktu czasu siatki $t(i = m)$, a zakończywszy na węźle dla początkowego punktu czasu siatki $t(i = 1)$. W tych ramach przeprowadzane jest porównanie każdego punktu czasu siatki $t(i - 1)$ z elementami wektora punktów czasu, w których przewiduje się możliwość wykonania opcji.

Procesy wyceny algorytmu 2 oparto na warunkach równania (18b). Generalnie przyjmują one formę rekursywną, ale wyjątek stanowi uruchamianie dla $u_{t(i)} > \Delta t(i)$ i prowadzący do obsługi funkcji (17) proces o charakterze typowo iteracyjnym i każdorazowo odwracającym kierunek analizy (stąd też tytułowa derekursywacja [3, s. 157]). Jest on uruchamiany w celu wyznaczenia wartości prawdopodobieństw dla ścieżek doprowadzających pomiędzy węzłami za wyjątkiem przypadku, w którym węzły te oddalone są od siebie o 1 przedział analizy (wówczas następuje szybsze, bezpośrednie pobranie już wyznaczonych elementów wektora P). Wspomniany proces iteracyjny może mieć korzystny wpływ na skrócenie czasu obliczeń i ograniczanie obszaru analizy do tych spośród węzłów siatki, które przyporządkowano punktom czasu opisanym możliwością wykonania opcji i ew. pierwszego punktu siatki (o ile nie przewidziano w nim możliwości wykonania opcji). Tym samym proces ten może prowadzić do zaniechania analizy pewnego podzbioru węzłów, w których nie istnieje możliwość wykonania opcji (wyjątek stanowi pierwszy węzeł siatki) i które nie mają wpływu na ustalenie wartości funkcji wyceny opcji, przy czym wymaga analizy odpowiednich ścieżek doprowadzających do wszystkich węzłów.



Rysunek 4: Przebieg analizy punktów czasu w procesach wyceny. W algorytmie 1: $s = 1$, zaś w algorytmie 2: $s \geq 1$, co wskazuje na możliwość koncentrowania obszaru analizy tylko na węzłach mających wpływ na wartość funkcji wyceny opcji i może istotnie skrócić czas obliczeń. Źródło: Opracowanie własne.

W świetle powyższego opisu działania procesów wyceny można postawić tezę, iż wraz ze wzrostem rozmiaru danych potrzebnych do skonfigurowania siatki wielomianowej (L, m) oraz w zależności od kontekstu stylu opcji czas obliczeń dla każdego z algorytmów może okazać się istotnie różny (na co uzyskano empiryczne potwierdzenie przedstawione w dalszej części artykułu). Niewątpliwie istotnie różna będzie także liczba analizowanych węzłów, podczas gdy wyznaczenie pozostałych cech opcji (z podzbioru przeznaczonych do zbadania) będzie dawało tożsame rezultaty dla każdego z algorytmów (uzależnione od przyjętej konfiguracji siatki).

5. Analiza wyników eksperymentu

W ramach eksperymentu postanowiono zbadać wpływ konfiguracji siatki wielomianowej (aspekt 1) oraz formy procesów wyceny dla algorytmu (aspekt 2) na pewne cechy definicji (1) dla opcji. Obejmują one czas obliczeń (w sek.), liczbę węzłów siatki oraz wycenę opcji, czyli odpowiednio: $T, \sum_{i=1}^m n_{t(i)}, V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})$. Dodatkowo, ze względu na różne wartości wyceny opcji uzyskiwane dla różnych wariantów konfiguracji siatki zbadano także jej zmienność $\sigma_{V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})}$ obliczaną za pomocą odchylenia standardowego.

Celem modulacji cech opcji we wskazanych aspektach była odpowiedź na dwa kluczowe pytania. Po pierwsze, jak konfiguracja rozkładu wpływa na czasochłonność realizacji podejmowanych algorytmów oraz który z nich okazuje się algorytmem efektywniejszym czasowo. Po drugie, jakie tendencje w wynikach wyceny opcji oraz ich zmienności zachodzą w związku z wprowadzeniem do rozkładu kolejnych stanów (wzrost L) w przyjętych punktach czasu $t(i)$, a jakie w związku z dyskretyzacją czasu (wzrost m). Wreszcie, jakie zmiany zajdą w związku z jednoczesną redefinicją i liczby stanów, i liczby punktów czasu.

Obliczenia wykonano dla opcji z profilem wypłaty $(V_{t(i)}^j(I^\alpha) - K_{t(i)})^+$, gdzie $K_{t(i)} = V_{t(1)}^1(I^\alpha)$. Dane wejściowe: $V_{t(1)}^1(I^\alpha) = 100, L = \{2, 3, 4\}, \mu_{V_{t(i)}^j(I^\alpha)} = 0.01, r_{t(i)}^{(1)} \neq r_{t(i)}^{(2)} = 0.25$ (w czynnikach dyskontowych stosowano stopę $r_{t(i)}^{(2)}$), $v_j \sim \phi(0, 1)$ (do wyznaczenia wektorów: Υ, P użyto metody Newtona-Raphsona), $\sigma_{\mu_{V_{t(i)}^j(I^\alpha)}} = 0.25, X = \{10, 20, 30\}, y = \{5\}$ dla $\eta = E$ lub $y = \{1, 3, 5\}$ dla $\eta = B$ lub $y = \{3, 4, 5\}$ dla $\eta = O$ lub $y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dla $\eta = A$. Środowisko obliczeń: Matlab 7.5.0. Zasoby sprzętowe: CPU 1.73GHz, RAM 1.5 GB, HDD 5400 rpm, ATA100.

Rozpatrzmy zatem uzyskane rezultaty, rozpoczynając z uwagi na główne zamierzenie pracy od analizy czasu obliczeń dla algorytmów i oceny ich relacji sprawnościowych. Pozwolą one na wskazanie o jaki % algorytm 1 działał szybciej lub wolniej w stosunku do algorytmu 2 (w warunkach układu oceny).

Tabela 1: Wyniki eksperymentu

x	L		2				3			
	alg.	Cecha	$\lambda^E(I^{\beta,o})$	$\lambda^B(I^{\beta,o})$	$\lambda^O(I^{\beta,o})$	$\lambda^A(I^{\beta,o})$	$\lambda^E(I^{\beta,o})$	$\lambda^B(I^{\beta,o})$	$\lambda^O(I^{\beta,o})$	$\lambda^A(I^{\beta,o})$
10	1,2	$V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})$	9.7433	9.8467	9.8631	9.8686	9.7477	9.8450	9.8612	9.8674
		$\sigma_{V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})}$	0.3643	0.3580	0.3634	0.3649	0.3883	0.4002	0.3869	0.3889
	1	$\sum_{i=1}^m n_{t(i)}$	1275				2500			
		T	0.0737	0.1521	0.1480	0.1600	0.1464	0.3238	0.2713	0.2714
	2	$\sum_{i=1}^m n_{t(i)}$	456	765	1066	1275	901	1500	2101	2500
		T	0.0676	0.0661	0.0784	0.0865	0.4344	0.2300	0.2404	0.2099
20	1,2	$V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})$	9.7665	9.8731	9.8870	9.8932	9.8423	9.9370	9.9499	9.9555
		$\sigma_{V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})}$	0.2745	0.2710	0.2735	0.2749	0.3148	0.3221	0.3120	0.3133
	1	$\sum_{i=1}^m n_{t(i)}$	5050				10000			
		T	0.2860	0.3294	0.3937	0.4197	0.5442	0.6301	0.6297	0.8114
	2	$\sum_{i=1}^m n_{t(i)}$	1811	3030	4231	5050	3601	6000	8401	10000
		T	0.2760	0.2585	0.2732	0.2654	1.0692	0.6238	0.5550	0.5372
30	1,2	$V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})$	9.7744	9.8816	9.8949	9.9014	9.9007	9.9896	10.0021	10.0073
		$\sigma_{V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})}$	0.2306	0.2281	0.2296	0.2309	0.2779	0.2825	0.2740	0.2749
	1	$\sum_{i=1}^m n_{t(i)}$	11325				22500			
		T	0.5878	0.7191	0.7268	0.8423	1.3066	2.1964	1.6010	2.5409
	2	$\sum_{i=1}^m n_{t(i)}$	4066	6795	9496	11325	8101	13500	18901	22500
		T	0.3827	0.5366	0.4797	0.5482	2.5635	1.4906	1.4551	1.8680

Źródło: Opracowanie własne.

Pierwszą grupę wyników skupioną na analizie czasu przetwarzania algorytmu obsługi opcji T cechuje dodatnia zależność od parametrów konfigurujących siatkę wielomianową. Na podstawie przyjętych danych wejściowych można stwierdzić, że dla algorytmu 1 silniejszą determinantą wzrostu czasochłonności jest wzrost liczby punktów czasu siatki m (powodowany wzrostem X -liczby komunikatów możliwych do przetworzenia), zaś dla algorytmu 2 – wzrost liczby jednomianów opisujących rozkład źródła ryzyka – L . Wzrost X o 10 dla każdej jednostki czasu opisanej w wektorze y wywołuje średni wzrost czasochłonności algorytmu 1 o 170.59%, podczas gdy jednostkowy wzrost liczby L -jednomianów – o 81.37%. Wprowadzenie takich danych dla algorytmu 2 powoduje odpowiednio wzrosty czasu obliczeń o 198.05% i 263.70%. Różnie kształtują się relacje pomiędzy wynikami czasochłonności algorytmów w kontekście różnych postaci rozkładu cen $V_{t(i)}^j(I^\alpha)$. W dwumianowym rozkładzie prawdopodobieństwa czasochłonność realizacji algorytmu 2 jest średnio o 31.61% mniejsza od czasochłonności przetwarzania algorytmu 1. Wynika to z możliwości szybkich przetworzeń formuły rozkładu wielomianowego w warunkach dwumianu oraz zawężania obszaru analizy (do węzłów mających wpływ na wartość funkcji wyceny opcji). W rozkładzie trójmianowym algorytm 2 okazuje się efektywniejszy średnio o 18.28% w przypadku stylów bermudzkiego, okienkowego i amerykańskiego. Dla obsługi stylu europejskiego szybsze jest użycie algorytmu 1, średnio o 54.81%. I dzieje się tak pomimo tego, iż dla stylu europejskiego liczba węzłów przetwarzanych w algorytmie 2 jest najmniejsza. Stąd też w tym przypadku decydujące znaczenie dla stymulacji wzrostu czasochłonności można przypisać funkcji gęstości rozkładu (17). W rozkładzie czteromianowym algorytm 1 okazuje się szybszy dla stylów europejskiego, bermudzkiego i okienkowego średnio o 70.06%, zaś algorytm 2 – dla stylu amerykańskiego, średnio o 33.59%. Wyniki uzyskane dla tej konfiguracji siatki potwierdzają zatem tezę o kluczowym znaczeniu funkcji (17) dla wzrostu czasochłonności algorytmu 2 – czas przetwarzania funkcji gęstości rozkładu przewyższa korzyści zapewniane przez algorytm 2 (analiza dedykowanych węzłów).

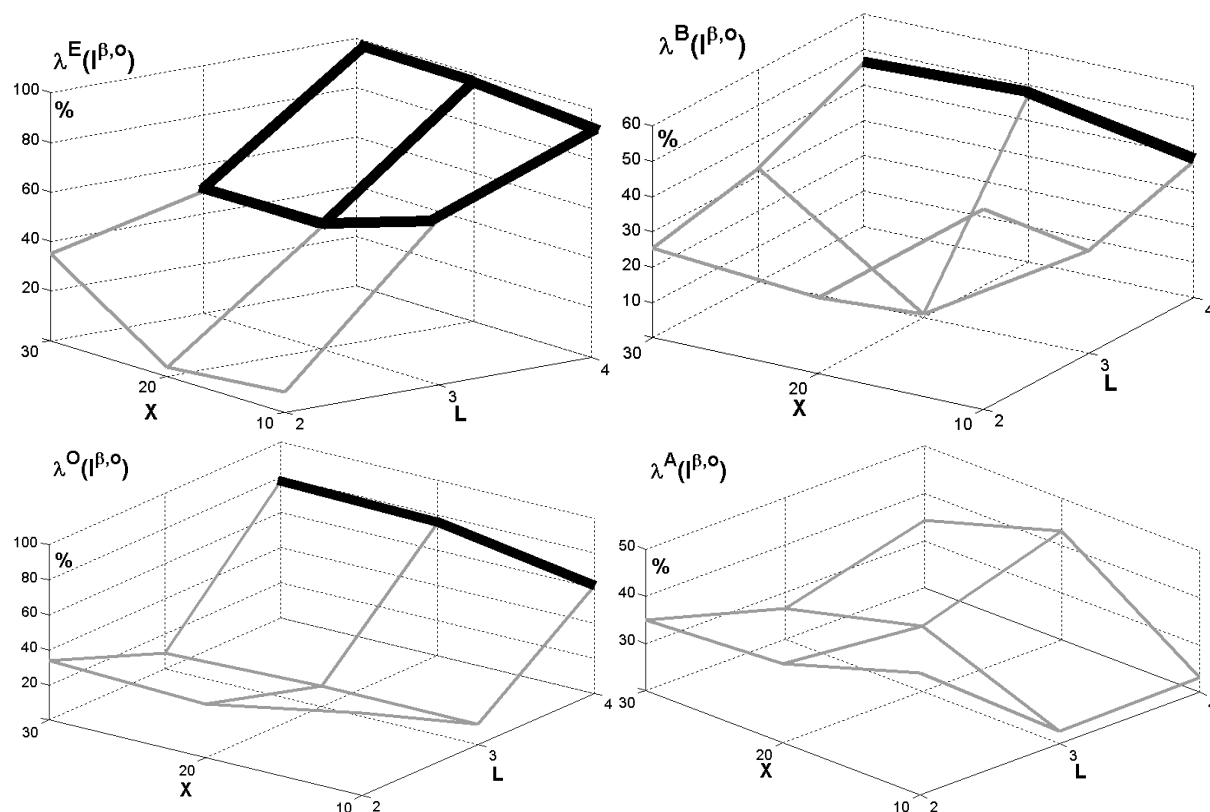
W tym miejscu można zatem stwierdzić, iż im niższa wartość parametrów: $L, u_{t(i)}$, tym bardziej algorytm 2 charakteryzuje się niższym czasem przetwarzania (wyższą sprawnością) w stosunku do algorytmu 1. Wynika to z szybkich obliczeń wartości funkcji (17) i zawężania pola analizy do tych węzłów siatki, które mają wpływ na wartość funkcji wyceny opcji (w przypadku stylów innych niż amerykański obserwuje się znaczną redukcję liczby węzłów). Relacja ta ulega zmianie na korzyść algorytmu 1 wraz ze wzrostem wartości parametrów: $L, u_{t(i)}$, gdy zwiększa się czasochłonność przetwarzania funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, a oszczędność czasu związana z zawężaniem analizy do wybranych węzłów siatki przyjmuje drugoplanowe znaczenie.

Drugą grupę wyników poświęcono wpływowi redefinicji parametrów konfigurujących siatkę wielomianową – m, L na wartość funkcji wyceny opcji. Badanie wykazało dodatnią zależność pomiędzy wzro-

Tabela 1: Wyniki eksperymentu - cd.

x	L		4			
	alg.	Cecha	$\lambda^E(I^{\beta,o})$	$\lambda^B(I^{\beta,o})$	$\lambda^O(I^{\beta,o})$	$\lambda^A(I^{\beta,o})$
10	1,2	$V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})$	9.6967	9.7987	9.8145	9.8210
		$\sigma_{V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})}$	0.3786	0.3916	0.3779	0.3800
	1	$\sum_{i=1}^m n_{t(i)}$	3725			
		T	0.3050	0.4069	0.2960	0.3763
		$\frac{\sum_{i=1}^m n_{t(i)}}{T}$	1346	2235	3136	3725
2	T	3.3249	0.6618	0.7692	0.2889	
20	1,2	$V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})$	9.7711	9.8715	9.8846	9.8909
		$\sigma_{V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})}$	0.3020	0.3107	0.3003	0.3018
	1	$\sum_{i=1}^m n_{t(i)}$	14950			
		T	0.8583	0.9082	0.9164	1.2360
		$\frac{\sum_{i=1}^m n_{t(i)}}{T}$	5391	8970	12571	14950
2	T	22.9316	1.7248	3.7903	0.7022	
30	1,2	$V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})$	9.8138	9.9092	9.9224	9.9283
		$\sigma_{V_{t(1)}^1(I^{\beta,o})}$	0.2628	0.2689	0.2601	0.2613
	1	$\sum_{i=1}^m n_{t(i)}$	33675			
		T	2.9698	2.5767	2.6228	2.8959
		$\frac{\sum_{i=1}^m n_{t(i)}}{T}$	12136	20205	28306	33675
2	T	75.1494	4.7815	11.9624	1.9013	

Źródło: Opracowanie własne.

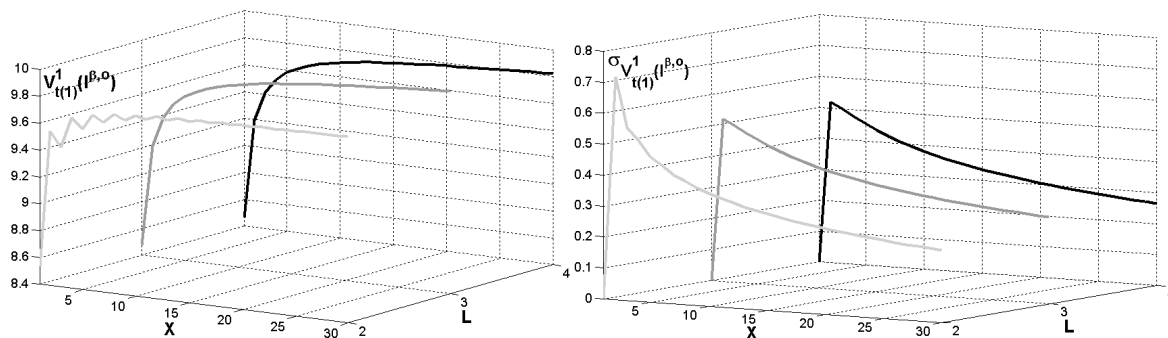


Rysunek 5: Wykresy sprawności algorytmów w kontekście stylu opcji powstałe na podstawie połączenia trójek $\langle L, X, \% \rangle$ liniami prostymi. Kolor czarny (pogrubienie) oznacza wyższą sprawność algorytmu 1, szary - 2 (o podany % dla $L = \{2, 3, 4\}$, $X = \{10, 20, 30\}$). Źródło: Opracowanie własne.

stem wartości parametru m (powodowanym przez wzrost możliwości przetwarzania danych X) a wzrostem wartości tejże funkcji średnio o 0.71%, przy czym funkcja osiąga swoje ekstrema dla stylów europejskiego (minimum) oraz amerykańskiego (maksimum). Wartości pomiędzy ekstremami zajmują wyceny opcji charakteryzowanych stylem bermudzkiego oraz okienkowym. Ten ostatni prowadzi do wyższych w stosunku do stylu bermudzkiego wartości funkcji wyceny ze względu na większą liczbę węzłów (uwzględnia więcej węzłów).

Z drugiej strony – wzrost wartości parametru L prowadzi do wniosku o niemonotoniczności funkcji wyceny opcji. Zaobserwowano obniżenie wyniku wyceny opcji w związku z zastąpieniem rozkładu dwumianowego źródła ryzyka rozkładem trójmianowym. Rozszerzenie rozkładu do postaci czteromianowej odwróciło tę tendencję.

Trzecia grupa rezultatów eksperymentu pozwala odpowiedzieć na pytanie dot. wahań wartości realizacji funkcji wyceny w związku z rekonfiguracją siatki wielomianowej w warstwie czasu (ściślej re-



Rysunek 6: Wykresy funkcji wyceny opcji oraz zmienności dla realizacji tejże wyceny w pierwszym węźle siatki. Widoczne tendencje są reprezentatywne dla wszystkich stylów opcji. Źródło: Opracowanie własne.

definicją wartości parametru m). Zmienność tę obliczono za pomocą funkcji odchylenia standardowego dla obserwacji wartości funkcji wyceny opcji uzyskanych dla różnych wariantów budowy siatki, począwszy od wariantu, w którym zakłada się możliwość przetworzenia wyłącznie jednego komunikatu w przedziale analizy, dalej wariantów, w których liczba takich komunikatów wzrasta o jednostkę aż do zadanego poziomu X , tak że jeden z wektorów determinujących wartość parametru m to $x = \{1, 2, \dots, X\}$. W tych warunkach wraz z malejącą amplitudą wahań wartości funkcji wyceny opcji następuje obniżenie zmienności, średnio o 17.43%, natomiast analiza wpływu wzrostu wartości parametru L nie pozwala wnioskować o skutkach takiej rozbudowy siatki dla zmienności.

Dysponując opisem sytuacji eksperymentalnej i rezultatami badań, warto podkreślić znaczenie przedstawionego sposobu zagęszczania siatki wielomianowej, kluczowego dla prawidłowej percepcji wprowadzonych wariantów stylu opcji. W wyniku zastosowania heurystyki $@(\cdot)$ każdemu przedziałowi czasu (np. dzień) z okresu życia opcji przypisuje się możliwość przetworzenia tej samej, potencjalnej liczby komunikatów (np. przekazanie/odbiór informacji o wykonaniu opcji). Zauważmy, iż nie gwarantuje tego klasyczny wariant metody siatkowej, w którym wspomniany okres życia instrumentu dzielony jest na z góry zdefiniowaną liczbę przedziałów analizy niezależnie od możliwości infrastruktury sprzętowej. Przykładowo, podział 5-dniowego okresu życia opcji na 14 przedziałów analizy w kontekście stylów bermudzkiego, okienkowego i amerykańskiego wymaga zróżnicowania liczby przedziałów analizy w 5 przedziałach czasu wspomnianego okresu życia opcji. Tym samym zaprezentowane w artykule podejście do konstrukcji siatki wielomianowej proponuje się uznać za rozwiązanie bardziej uniwersalne w stosunku do klasycznej postaci metody siatkowej (nie zawsze pozwalającej spełnić warunki stylów opcji).

6. Zakończenie

Przeprowadzona analiza i rezultat doświadczeń upoważniają do podjęcia próby ich podsumowania. Wprowadzona definicja opcji pozwala skupić analizę na technicznych aspektach obsługi tych instrumentów i odejść od mnożonych klasyfikacji, przeprowadzanych dotąd niemal wyłącznie z perspektywy opcyjnych własności ekonomicznych (drugorzędnych dla procesu budowy oprogramowania). Konsekwencją wprowadzenia tejże definicji jest potrzeba sformułowania koncepcji metody budowy odpowiedniej siatki wielomianowej. Przedyskutowana w artykule jednowymiarowa egzemplifikacja siatki wykazuje możliwość modulacji pewnych cech opcji: czasu przetwarzania opcji, liczby węzłów siatki i wreszcie wartości funkcji wyceny instrumentu oraz wartości funkcji zmienności dla realizacji wyceny opcji w pierwszym węźle siatki (w następstwie rekonfiguracji jej parametrów). Tak sformułowany kontekst dociekań prowadzi do trzech równie istotnych wniosków.

Po pierwsze, badane cechy definicji opcji mogą być analizowane w następstwie procesów wyceny (składowe algorytmu obsługi opcji) w formach: rekursywnej oraz rekursywno-iteracyjnej. Zróżnicowanie tych form pozwala dostrzec istotne, bo sięgające 18-70%, różnice w czasie obliczeń (rysunek 5), które mogą wynikać z dwóch wielkości liczby węzłów siatki podlegających analizie oraz liczby redefinicji wartości funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, przy czym kluczowe znaczenie dla ich ustalania odgrywają procesy derekursywacji. Stąd możliwość dokonania wyboru algorytmu o najwyższej sprawności, tj. najkrótszym czasie obliczeń, niewątpliwie powinna mieć istotne znaczenie dla podmiotów realizujących numeryczne procesy skoncentrowane na wieloelementowych zbiorach opcji, np. dla centrów obliczeniowych instytucji finansowych.

Po drugie, zaproponowany sposób percepcji: aktywności środowiska (ryнку) oraz możliwości techniczno-technologicznych (własności infrastruktury sprzętowej), umożliwia regulację stopnia dyskretyzacji siatki do poziomu realiów przeprowadzania transakcji opcyjnych na rynku. W przeciwieństwie do klasycznego podziału okresu życia opcji na zadaną liczbę punktów czasu taki sposób rozwijania siatki daje gwarancję jej adaptacji do spełnienia własności stylu opcji, przy czym wzrost liczebności punktów czasu, w których możliwe jest wykonanie opcji, prowadzi potencjalnie do wzrostu wartości wyceny opcji. Wzrostu o tym większym potencjale wystąpienia, im więcej węzłów siatki wykazujących możliwości wykonawcze zlokalizowanych jest bliżej daty wygaśnięcia opcji. I wzrostu o tym mniejszym przyroście, im większa jest liczba tychże punktów czasu w okresie życia opcji (rysunek 6 – wykres lewy).

Po trzecie, zagęszczenie siatki wielomianowej powodowane wzrostem liczby punktów czasu składających się na okres życia opcji prowadzi do zmniejszenia wartości międzyszczytowej dla wykresu funkcji wyceny opcji (rysunek 6 – wykres prawy).

Wnioski drugi i trzeci implikują zatem znaczenie użytkowe rozważonej metody analizy opcji, istotne zwłaszcza z punktu widzenia stron transakcji opcyjnych, np. klientów instytucji finansowych.

Ze względu na powyższe można stwierdzić, że rezultaty przeprowadzonych badań wskazują na wymierne korzyści wynikające z odpowiedniego wyboru jednego z opisanych algorytmów. Potwierdzają

tym samym praktyczną przydatność zastosowania rezultatów eksperymentu, co dopełnia uzasadnienie próby zbadania problematyki podjętej w niniejszej pracy.

Literatura

1. Cox J., Ross S., Rubinstein M., *Option pricing: a simplified approach*. Journal of Financial Economics, 1979, nr 7.
2. Lander D., Pinches G., *Challenges to the practical implementation of modelling and valuing real options*. The Quarterly Review of Economics and Finance, 1998, nr 38.
3. Wróblewski P., *Algorytmy, struktury danych i techniki programowania*. Helion, Gliwice 2003.

* * *

w w w . e - f i n a n s e . c o m


finansowy kwartalnik internetowy