eFinanse
finansowy kwartalnik internetowy

Dr Agata Gemzik-Salwach
Katedra Makroekonomii
Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania w Rzeszowie
https://dx.doi.org/10.65748/fiqf-2010-0010

Analiza komparatywna koncepcji czasowej struktury stóp procentowych. Podejście analityczne i krytyczne

Wprowadzenie

Czasowa struktura stóp procentowych jest niewątpliwie jednym z podstawowych i najbardziej istotnych obszarów zainteresowań rynków finansowych i całej gospodarki. Definiuje się ją dość prosto jako relacje, w jakich pozostają stopy dochodowości instrumentów dłużnych o różnych terminach do wykupu, natomiast graficzny obraz tych związków określa się jako krzywą dochodowości. Zmiany krzywej dochodowości odzwierciedlają konkurencję panującą zarówno na rynku pieniężnym, jak i kapitałowym, oczekiwaną inflację oraz zmiany warunków gospodarczych. Analiza przebiegu krzywej stopy procentowej pozwala na zorientowanie się, jakich stawek oprocentowania można się spodziewać w przyszłości. Na tej podstawie zbudowane zostały inne liczne koncepcje, np. umożliwiające szacowanie ryzyka kredytowego, wycenę instrumentów pochodnych na stopę procen-tową czy założenie o równowadze rynku finansowego[1]. Natomiast już estymacja struktury termino-wej stóp procentowych, mimo iż przydatna, jest równocześnie dość skomplikowana. Należy zmie-rzyć się tu zarówno z wyborem jednej z wielu możliwych dróg estymacji, zastanowić się nad dobo-rem właściwych danych, jak i uporać się z problemem niewystarczającej płynności rynku.

W obliczu istnienia wielu koncepcji wyjaśniających kształt krzywej dochodowości oraz dużej liczby problemów, które powinny zostać rozwiązane przy estymacji krzywej dochodowości, powsta-ło spore zamieszanie związane ze stosowaną terminologią oraz metodologią. Celem artykułu jest zebranie i przedstawienie w syntetycznej formie zagadnień związanych z teorią czasowej struktury stóp procentowych oraz jej estymacją w oparciu o gruntowne studia literaturowe. Podjęta została tu próba uporządkowania i usystematyzowania obecnego stanu wiedzy na ten temat.

Teorie terminowej struktury stóp procentowych

Teorie terminowej struktury stóp procentowych poprzez opis czynników determinujących ich zróżnicowanie czasowe oraz objaśnienia mechanizmów kształtujących poziom stanowią podstawę prognozy stóp terminowych. Badaniem przebiegu krzywej dochodowości ekonomiści zajmowali się przez większą część XX w., pomimo to pierwsze modele matematyczne, dające się skutecznie stosować w praktyce, pojawiły się dopiero w połowie lat 70., a modele bardziej realistyczne – bazujące na stopie forward – dopiero na początku lat 90.[2].

Istnieje wiele konkurujących ze sobą modeli objaśniających kształtowanie się stóp procentowych na rynku i ich zróżnicowanie czasowe, które często sprowadza się do trzech zasadniczych podejść[3]:

- teorii oczekiwań,
- teorii naturalnych preferencji,

[1] Szerzej: F.J. Fabozzi, *Bond Markets, Analysis and Strategies*, Prentice Hall, 2010; J. Van Horne, *Financial Market Rates and Flow*, Prentice Hall, 2001; M. Livingston, *Bonds and Bond Derivatives*, Blackwell Publishing, Boston 2005; W. Semmler, *Asset Prices Booms and Recessions*, Springer, 2004.
[2] A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998, s. 204.
[3] J.F. Sinkey, *Commercial Bank Financial Management in the Financial-Services Industry*, Macmillan Publishing Company, New York 1992, s. 239.

- teorii preferowanych habitatów (segmentacji rynków).

Każda z tych koncepcji opiera się na szeregu upraszczających założeń, które mogą stanowić ich wyróżnik, ale równocześnie podstawę wysuwanych wobec nich zarzutów. Należy w tym miejscu podkreślić, że żadna ze stworzonych do tej pory hipotez nie wyjaśnia w sposób zadowalający empirycznych obserwacji kształtów przybieranych przez krzywą dochodowości.

Najstarsze i najbardziej rozpowszechnione podejście to wywodząca się od I. Fischera[4] teoria oczekiwań, która swój rozwój zawdzięcza F.A. Lutzowi[5] i D. Meiselmanowi[6] (to ich często uważa się za jej twórców). Wśród wcześniej prowadzonych badań zmierzających w kierunku tej hipotezy można wymienić prace autorstwa B.J. Saya[7], E.V. Bohm-Bawerka[8] oraz H. Sidgwicka[9].

Opiera się ona na następujących założeniach:

1. Wszystkie podmioty gospodarcze występujące na rynku zachowują się w sposób racjonalny, a ich celem jest maksymalizacja zysków.
2. Instrumenty finansowe o jednakowym, kontraktowym okresie trwania są homogeniczne.
3. Na rynku brak jest barier wejścia i wyjścia na jego poszczególne segmenty.
4. Wszyscy inwestorzy mają pełny dostęp do informacji.

Analizując powyższe warunki, można stwierdzić, że mamy do czynienia z rynkiem doskonale efektywnym, na którym podmioty gospodarcze przechodzą swobodnie, bez żadnych kosztów transakcyjnych pomiędzy jego segmentami, wybierając ten, który w danym momencie przynosi najwyższy zysk. Te obwarowania w połączeniu z jednakowym dostępem do informacji implikują homogeniczność zachowań inwestorów, których determinantą są oczekiwania dotyczące przyszłego kształtowania się poziomu stóp procentowych[10]. Uczestnicy rynków finansowych poprzez swoje decyzje dają wyraz oczekiwań co do kształtowania się stawek w przyszłości[11].

Jeżeli dominująca liczba podmiotów gospodarczych oczekuje w przyszłości wzrostu krótkoterminowych stóp procentowych, to stopa długoterminowa, jako średnia z oczekiwanych wartości stóp krótkoterminowych, będzie wyższa od stopy krótkoterminowej, a krzywa stopy procentowej będzie rosnąca. W przypadku oczekiwanego spadku stóp krótkoterminowych będziemy mieć do czynienia z sytuacją odwrotną[12]. Płaski przebieg krzywej dochodowości stopy procentowej świadczyłby o niesprecyzowanych oczekiwaniach uczestników rynku.

Wobec powyższych stwierdzeń zależność pomiędzy krótko- i długoterminowymi stopami procentowymi można zapisać przy pomocy równania[13]:

$$y_{n,t} = \left[(1+y_{1,t})(1+f_{1,t+1})\ldots(1+f_{1,t+n-1})\right]^{\frac{1}{n}}-1, \tag{1}$$

gdzie:

$y_{n,t}$ – n-okresowa stopa procentowa obserwowana w momencie t;

$f_{1,\,t+1}$, $f_{1,\,t+2}$, ..., $f_{1,\,t+n-1}$ – oczekiwane roczne stopy procentowe rozpoczynające się w kolejnych okresach: t + 1, t + 2, ..., aż do momentu t + n -1.

---

[4] Zob. I. Fisher, *The Theory of Interest*, MacMillan, London 1930.
[5] Zob. F.A. Lutz, *The Structure of Interest Rates*, „Quarterly Journal of Economics" 1940, nr 55, s. 36–63.
[6] Zob. D. Meiselman, *The Term Structure of Interest Rates*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1962.
[7] Zob. J.B. Say, *A Treatise on Political Economy*, Lippincott Grambo & Co., Philadelphia 1855.
[8] Zob. E.V. Bohm-Bawerk, *The Positive Theory of Capital*, G.E. Schwert & Co., London 1891.
[9] Zob. H. Sidgwick, *The Principles of Political Economy*, MacMillian, London 1887.
[10] W literaturze przedmiotu funkcjonują cztery różne odmiany teorii oczekiwań: hipoteza czystych oczekiwań, hipoteza lokalnych oczekiwań, hipoteza zwrotu do wykupu oraz hipoteza rentowności do wykupu. Czynnikiem różnicującym jest podejście do problemu, czy oczekiwania inwestorów są jedynym determinantem kształtu krzywej. Teoria przedstawiona w niniejszej pracy opiera się hipotezie czystych oczekiwań, która jest najbardziej rozpowszechnioną jej wersją. Opisy pozostałych hipotez można znaleźć w pracy: J.C. Cox, J.E. Ingersoll, S.A. Ross, *A Re-Examination of Traditional Hypothesis about the Term Structure of Interest Rates*, „The Journal of Finance" 1981, September, s. 769–799.
[11] F.S. Mishkin, *Yield Curve*, NBER Working Paper, 3550, MA, Cambridge 1990, s. 1.
[12] Z. Fedorowicz, *Funkcjonowanie i zadania bankowości w procesie przebudowy systemu gospodarczego*, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 1992, s. 127.
[13] J.F. Sinkey., *op.cit.*, s. 241.

W literaturze przedmiotu można spotkać jeszcze dwa inne zapisy tej zależności[14]:

$$e^{n, y_{n,t}} = e^{r_{1,t}} e^{f_{1,t+1}} \dots e^{f_{1,t+n-1}}, \qquad (2)$$

$$y_{n,t} = \frac{1}{n}(y_{1,t} + f_{1,t+1} + \dots + f_{1,n+t-1}). \qquad (3)$$

Badania empiryczne, polegające na prognozowaniu stóp za pomocą przedstawianych równań i zestawianiu otrzymanych wyników ze stanem faktycznym dość często wskazują na niską sprawdzalność tej koncepcji[15]. Podstawę jej krytyki stanowi również zakładana tu prostota i jednorodność prognozowania terminowych stóp procentowych oraz sprzeczność wobec innych teorii terminowej struktury stóp procentowych[16]. Mimo to teoria oczekiwań wciąż odgrywa fundamentalną rolę w wyjaśnianiu poziomu stóp procentowych i właśnie na niej opiera się wiele narzędzi opisujących funkcjonowanie współczesnych rynków finansowych.

Druga z wymienionych hipotez, teoria naturalnych preferencji, zwana też teorią instytucjonalnego popytu, przyjmuje za czynnik determinujący poziom stóp procentowych oczekiwania inwestorów dotyczące kształtowania się krótkoterminowych stóp procentowych, uzupełnione o premię wynikającą z czasu trwania lokaty. Za jej autora uważa się zwykle J.R. Hicksa[17], chociaż cała koncepcja naturalnych preferencji wychodzi znacznie poza omawiany przez niego zakres, który stanowi tylko jeden z głównych nurtów tej hipotezy, tj. teorię preferencji płynności. Inne nazwiska, którym zawdzięcza się obecną postać tej koncepcji, to R.A. Kessel[18], F. Modigliani i R. Sutch[19] oraz E.J. Kane i B.G. Malkiel[20].

Zgodnie z tą teorią inwestorzy posiadają pewne preferencje czasowe wynikające z charakteru ich działalności, decyzji w zakresie rozłożenia konsumpcji w czasie lub regulacji prawnych. Rezygnacja z preferowanego okresu inwestycyjnego musi zostać zrekompensowana premią, tym większą, im większa jest różnica pomiędzy kontraktowym okresem trwania instrumentu, a wspomnianym ulubionym horyzontem inwestycyjnym[21]. Oprócz dążenia podmiotów rynku do maksymalizacji zysków jako część mechanizmu równowagi uwzględniona jest więc także niepewność dotycząca kształtowania się wysokości stawek procentowych w przyszłości, rosnąca wraz z upływem czasu[22].

Relację pomiędzy stopami krótko- i długoterminowymi wyrażają zapisy[23]:

$$y_{n,t} = \left[(1 + y_{1,t})(1 + f_{1,t+1} + L_2)\dots(1 + f_{1,t+n-1} + L_n)\right]^{\frac{1}{n}} - 1, \qquad (4)$$

$$e^{n, y_{n,t}} = e^{r_{1,t}} \cdot e^{f_{1,t+1} + L_1} \dots e^{f_{1,t+n-1} + L_{n-1}}, \qquad (5)$$

$$y_{n,t} = \frac{1}{n}(y_{1,t} + f_{1,t+1} + L_1 + \dots + f_{1,t+n-1} + L_{n-1}), \qquad (6)$$

---

[14] K. Jackowicz, *Zarządzanie ryzykiem stopy procentowej. Metoda duracji*, PWN, Warszawa 1999, s. 19.
[15] Wyniki takich badań można znaleźć np. w pracach: J.M. Culbertson, *The Term Structure of Interest Rates*, „Quarterly Journal of Economics" 1957, nr 71, s. 485–517; F.R. Macaulay, *Some Theoretical Problems Suggested by Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States*, NBER, New York 1938.
[16] Wyniki badań tych aspektów teorii oczekiwań zostały opublikowane w 1958 r. przez J. Tobina: J. Tobin, *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*, „Review of Economic Studies" 1958, nr 76, s. 65–86.
[17] Zob. J.R. Hicks, *Value and Capital*, Oxford University Press, London 1953.
[18] Zob. R.A. Kessel, *The Cyclical Behavior of the Term Structure of Interest Rates*, NBER Working Paper, 91, Cambridge 1965.
[19] Zob. F. Modigliani, R. Sutch, *Innovations in Interest-Rate Policy*, „American Economic Review" 1966, May, s. 178–197.
[20] Zob. E.J. Kane, B.G. Malkiel, *The Term Structure of Interest Rates: An Analysis of a Survey of Interest-Rate Expectations*, „Review of Economics and Statistics" 1967, August, s. 343–355; E.J. Kane, *The Term Structure of Interest Rates: An Attempt to Reconcile Teaching with Practice*, „Journal of Finance" 1970, May, s. 361–374; B. G. Malkiel, *The Term Structure of Interest Rates: Expectations and Behavior Patterns*, Princeton University Press, Princeton 1966.
[21] K. Jackowicz, *op.cit.*, s. 20–21.
[22] F.A. Lutz, *op.cit.*, s. 62.
[23] J.F. Sinkey, *op.cit.*, s. 243.

gdzie:
L – premia za ryzyko.

Długoterminową stopę procentową określa się wtedy jako średnią oczekiwań z krótkoterminowych stóp procentowych z danego okresu, a do tego dodaje się jeszcze marżę z tytułu długookresowego terminu lokaty.

W ramach teorii naturalnych preferencji mieści się sformułowana przez J.R. Hicksa i często przytaczana jako zasadnicza koncepcja preferencji płynności. Od opisanego powyżej podejścia różni się ona tym, że odnosi upodobania inwestorów wyłącznie do krótkiego okresu czasu i nie uznaje ich preferencji dotyczących zmian stopy reinwestycji. Oznacza to przyjęcie założenia o zawsze rosnącej krzywej dochodowości i dodatnich wartościach przyjmowanych przez omawiany wcześniej *spread*. Teorie oczekiwań i preferencji płynności są często rozpatrywane łącznie i stanowią wzajemne uzupełnienie swych treści.

Powstanie i rozwój preferowanych habitatów zawdzięcza się J.M. Culbertsonowi[24] oraz S. Homerowi i R.L. Johannesenowi[25]. Preferowany habitat to taki segment rynku, na którym dana instytucja finansowa może kupić lub sprzedać papiery wartościowe o terminach zapadalności (wymagalności) odpowiadających okresom zmian stawek procentowych już posiadanych aktywów i pasywów[26]. W zależności od rodzaju instytucji finansowej preferowanym habitatem może być rynek papierów krótkoterminowych (np. dla banków posiadających głównie pasywa krótkoterminowe) lub rynek papierów długoterminowych (np. fundusze inwestycyjne)[27]. Głównym celem instytucji jest utrzymanie się na rynku. Aby to osiągnąć, musi ona minimalizować ryzyko. Metodą zabezpieczania się przed ryzykiem stopy procentowej jest utrzymywanie takiej struktury portfela aktywów finansowych, by ich średni ważony termin zapadalności był możliwie zbliżony do średniego ważonego terminu zapadalności pasywów. Inwestorzy, którzy dopasowują terminy zapadalności aktywów do terminów zapadalności pasywów, ponoszą najniższe ryzyko. W ramach tak określonych warunków nie można sformułować postaci funkcyjnej zależności stóp długoterminowych od krótkoterminowych.

Premia za ryzyko cenowe bądź ryzyko reinwestowania jest premią za ryzyko wyjścia danej instytucji finansowej poza bezpieczny dla niej habitat. Oznacza to, że jeżeli aktywa o innych terminach zapadalności zapewnią dostatecznie wysoką stopę zwrotu, wówczas inwestorzy dostosują swoją pozycję w taki sposób, aby uwzględnić więcej aktywów, które przynoszą wysoki dochód. Premie więc pojawiają się przy tych terminach wykupu, w przypadku których zaznaczył się niedostateczny popyt i są one konieczne, aby skłonić inwestorów do opuszczenia preferowanego środowiska. Jeżeli chęć emisji instrumentów długoterminowych wyraża więcej firm w porównaniu do liczby inwestorów zainteresowanych lokowaniem w takie walory, to instrumenty długoterminowe muszą zapewnić odpowiednią premię. Podobnie, jeśli wiele firm i instytucji przejawia wolę emisji zadłużenia krótkoterminowego, a równocześnie niewielu inwestorów chce lokować w krótkich terminach, to wówczas premia wystąpi w przypadku instrumentów krótkoterminowych[28].

Tak więc w pewnym sensie teoria preferowanych habitatów tłumaczy kształt krzywej dochodowości na tych odcinkach, na których występuje ściąganie jej w dół. Spekulacja na rynku papierów wartościowych jest siłą „wygładzającą" kształt krzywej dochodowości. W przypadku jej braku krzywa miałaby kształt falisty, obniżający się w miejscach, w których popyt na rynkach papierów

[24] Zob. J.M. Culbertson, *op.cit.*, s. 485–517.
[25] Zob. S. Homer, R.L. Johannesen, *The Price of Money,1946 to 1969*, Rutgers University Press, Rutgers 1969.
[26] Okres zapadalności dotyczy aktywów i jest to przedział czasu pomiędzy datą analizy a datą wpływu należności do banku, natomiast okres zapadalności odnosi się do pasywów i jest przedziałem czasu pomiędzy datą analizy a datą realizacji przez bank zobowiązań. Oprócz dopasowywania do struktury już posiadanych aktywów i pasywów pozycji o odpowiednich terminach zapadalności i wymagalności można jeszcze wykorzystać instrumenty, których okresy przeszacowywania stawek procentowych odpowiadają tym terminom.
[27] A. Grąt, *Ryzyko stopy procentowej i instrumenty służące zabezpieczaniu się przed nim*, „Materiały i Studia", Zeszyt nr 85, NBP, Warszawa 1999, s. 19.
[28] J. Elton, M.J. Gruber, *Nowoczesna teoria portfelowa i analizy papierów wartościowych*, WIG Press, Warszawa 1998, s. 639.

wartościowych jest relatywnie większy. Hipotezę tę uznaje się za koncepcję najlepiej sprawdzającą się w rzeczywistości.

Pierwotna wersja teorii preferowanych habitatów nazywana była teorią segmentacji rynku. Zakłada ona, że o kształtowaniu się stóp procentowych w różnych okresach decydują relacje pomiędzy podażą i popytem na środki finansowe w poszczególnych segmentach rynku, a spekulacja na rynku papierów wartościowych nie istnieje ze względu na trudno przewidywalne zmiany stóp procentowych. W tej sytuacji największym mankamentem takiej teorii jest odrzucenie możliwości substytucyjności krótko- i długoterminowych instrumentów dłużnych. W rzeczywistości bowiem mimo istnienia wyraźnych preferencji inwestorów w stosunku do określonego segmentu rynku są oni skłonni go porzucić, jeżeli tylko otrzymają w zamian odpowiednio wysoką premię[29].

Podsumowanie podstawowych założeń funkcjonujących w ramach każdej z zaprezentowanych teorii przedstawia tab. 1.

Tab.1. Porównanie podstawowych teorii terminowej struktury stóp procentowych

Kryterium porównawcze	Teoria oczekiwań	Teoria naturalnych preferencji	Teoria segmentacji rynku
Kluczowa determinanta	Oczekiwane przyszłe krótkoterminowe stopy procentowe	Oczekiwane przyszłe krótkoterminowe stopy procentowe oraz preferencje czasowe inwestorów	Popyt i podaż instrumentów finansowych na oddzielnych rynkach
Zmienne decyzyjne uwzględniane przez podmioty gospodarujące:			
a) dochód	tak	tak	nie
b) zmiany cen instrumentów finansowych	nie	tak	tak
c) zmiany stóp reiwenstycji	nie	tak	tak
Substytucyjność instrumentów finansowych	doskonała	ograniczona	brak
Relacja miedzy krótko- i długoterminowymi stopami procentowymi	liniowa formuła wykorzystująca oczekiwane stopy procentowe	liniowa formuła wykorzystująca stopy terminowe	nieokreślona (rynki tworzą osobne segmenty)
Wyznaczanie stóp terminowych	na podstawie oczekiwanych stóp procentowych	na podstawie oczekiwanych stóp procentowych oraz premii kompensacyjnej	nie określa odpowiedniej formuły

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: K. Jackowicz, op.cit., s. 20–21, J.F. Sinkey, op cit., s. 240 oraz S.D. Smith, R.E. Spudeck, Interest Rates. Principles and Applications, The Dryden Press, New York 1993, s. 240.

[29] F. Modigliani, R. Sutch, *op.cit*., s. 184.

Estymacja struktury terminowej stóp procentowych

Pełna krzywa dochodowości nie jest obserwowalna na rynku, wartość niektórych wymaganych stóp natychmiastowych można uzyskać, wyznaczając rentowność dla pewnych grup płynnych instrumentów dłużnych[30]. Dobierając instrumenty w grupy, przy konstrukcji krzywej dochodowości, przestrzega się zasady, że muszą one odzwierciedlać jednakową wiarygodność kredytową. Grupy te mogą tworzyć przykładowo obligacje skarbowe o tym samym kuponie, wszystkie bony i obligacje skarbowe o stałym oprocentowaniu dostępne na rynku, jak też kontrakty depozytowe oraz kontrakty FRA.

W Polsce często wykorzystuje się w tym celu bony skarbowe oraz wszystkie obligacje skarbowe o stałym oprocentowaniu albo tworzy się krzywą dochodowości, której terminowa struktura stóp procentowych w okresie do roku budowana jest na bazie stóp WIBOR, a dla okresu powyżej jednego roku (najczęściej jest to przedział czasowy 1–10 lat) terminowa struktura stóp procentowych tworzona jest na podstawie kwotowań standardowych transakcji zamiany stóp procentowych (IRS)[31].

Pierwszym etapem w procesie estymacji jest wyznaczenie równania zerokuponowej krzywej dochodowości na podstawie przekształceń funkcji dyskontowej:

$$\mathrm{d}(\mathrm{t}) = \frac{1}{(1+y_t)^t}, \tag{7}$$

$$y(t) = d(t)^{-\frac{1}{t}} - 1, \tag{8}$$

gdzie:
d(t) – czynnik dyskontowy kalkulowany dla okresu czasu t;
y(t) – t-letnia natychmiastowa stopa procentowa.

Konstrukcji funkcji dyskontowej towarzyszy założenie, że jest ona ciągła i nierosnąca względem okresu czasu t, co ma na celu uniknięcie sytuacji, w której stopy terminowe przybierałyby wartości ujemne[32]. Jak widać, struktura terminowa czynników dyskontowych i struktura terminowa stóp procentowych są obiektami dualnymi w tym sensie, że jedna struktura wyznacza równocześnie drugą[33].

Stopę zwrotu wyznacza się na podstawie notowanych na rynku instrumentów. Ze względu na wspomnianą wcześniej niewielką liczebność zbioru bezkuponowych papierów dłużnych na rynku polskim wymuszona jest konieczność wykorzystania wszystkich bonów i obligacji Skarbu Państwa o stałym oprocentowaniu[34].

Rentowność bonów skarbowych wyznacza krzywą dochodowości na odcinku należącym do rynku pieniężnego. Można zapisać ją za pomocą równania:

$$y(t) = \left(\frac{N}{P} - 1\right) \cdot t, \tag{9}$$

---

[30] Oprócz cytowanych pozycji literatury opis metod estymacji krzywej dochodowości można znaleźć np. w: J. Campbell, A. Lo, A. Mackinlay, *Econometricof Financial Markets*, Princeton, 1997; G. Maddala, C. Rao, *Handbook of Statistics Statistical Methods in Finance*, Elsevier, 1996; K. Patterson, *An Introduction to Applied Econometrics*, Palgrave, 2000.

[31] Krzywą stóp procentowych zbudowaną w głównej mierze na podstawie notowań kontraktów IRS nazywa się zwykle swapową krzywą stóp procentowych.

[32] Założenie to jest prawdziwe tylko w przypadku, gdy nie istnieje możliwość arbitrażu na rynku.

[33] W. Waluś, *Duration i wypukłość w przypadku niepłaskiej struktury stóp procentowych*, „Rynek Terminowy" 2001, nr 4, s. 101–102.

[34] Jest to sprzeczne z założeniem o tzw. homogeniczności instrumentów dłużnych wykorzystywanych do konstrukcji krzywej dochodowości. Mówi ono o takim doborze wartościowych papierów procentowych, by różniły się one jedynie czasem pozostającym do wykupu. Istniejące na polskim rynku obligacje o stałym oprocentowaniu charakteryzują się zróżnicowana wysokością kuponów, stąd otrzymana na ich podstawie krzywa jest wewnętrznie niespójna.

gdzie:
y(t) – rentowność bonu skarbowego stanowiąca t-okresową zerokuponową stopę procentową;
t – czas pozostały do terminu wykupu bonu skarbowego (wyrażony w latach);
N – wartość nominalna bonu;
P – cena ustalona na przetargu w dniu zakupu.

W pozostałym przedziale czasowym, tj. okresie powyżej jednego roku, stopy zerokuponowe uzyskiwane są z kwotowań obligacji skarbowych o stałym oprocentowaniu, przy wykorzystaniu formuły ich wyceny. Dla obligacji zerokuponowych stopa rentowności wyznaczana jest bezpośrednio z wzoru:

$$y(t) = \left(\frac{N}{P}\right)^{t} - 1, \qquad (10)$$

gdzie:
y(t) – rentowność obligacji zerokuponowej;
t – czas pozostały do terminu wykupu;
N – wartość nominalna bonu;
P – wartość rynkowa obligacji.

Bardziej skomplikowane jest wyznaczanie stóp zerokuponowych na podstawie notowań cen kuponowych obligacji skarbowych. Wykorzystuje się tu tzw. metodę bootstrapingu, tłumaczoną też jako metoda „samouzgodnienia”. Zgodnie z nią estymacja opiera się na założeniu, że każdą obligację kuponową można potraktować jako portfel obligacji bezkuponowych o terminach wykupu przypadających na daty płatności instrumentu. Podstawowa trudność polega tu na wyznaczeniu stóp zwrotu w terminie do wykupu, wymaga ono zapisania równania bieżącej wartości ciągu płatności:

$$P = \sum_{t=1}^{m \cdot t} Nk \cdot \left(1 + \frac{y(t)}{m}\right)^{-t} + N \cdot \left(1 + \frac{y(t)}{m}\right)^{-m \cdot t}, \qquad (11)$$

gdzie:
k – stopa oprocentowania kuponu;
N – wartość nominalna obligacji;
P – wartość rynkowa obligacji;
y(t) – stopa zwrotu terminu wykupu t;
m – ilość przeprowadzanych w ciągu roku kapitalizacji.

Zapisane w ten sposób równanie ceny obligacji należy przekształcić tak, aby otrzymać wymaganą stopę zerokuponową r_t. Kolejne stopy zerokuponowe o odpowiadających im terminach zapadalności, wyznaczane tą droga dla różnych obligacji stanowią odpowiednie punkty krzywej dochodowości.

Estymacja krzywej dochodowości na dalszym etapie pracy może przebiegać w oparciu o jedną z dwóch podstawowych metodologii: pierwsza z nich opiera się na szacowaniu struktury terminowej stóp procentowych poprzez ekstrakcje i wygładzanie danych uzyskanych na podstawie notowań cen rynkowych instrumentów dłużnych, natomiast druga ujmuje ceny aktywów finansowych za pomocą procesów stochastycznych, tworząc modele czasowej struktury stóp procentowych w kontekście założenia, że rynek zachowuje stan równowagi bądź też nie istnieje na nim możliwość arbitrażu[35].

Pierwsza z możliwych dróg określa momenty w czasie t = 1, 2,…, n, dla których stopy zerokuponowe są zwane na podstawie kwotowań na rynku mianem węzłów krzywej dochodowości. Prze-

[35] T. Dacewicz, E. Radkowska, *Terminowa struktura stóp procentowych*, „Nasz Rynek Kapitałowy” 1999, nr 8, s. 42.

dłużeniu krzywej służą metody ekstrapolacji, natomiast aby wypełnić pozostałą przestrzeń pomiędzy danymi i uzyskać odpowiednią gładkość krzywej, wykorzystuje się zwykle interpolację liniową, chociaż stosowane w tym celu programy komputerowe czasami odwołują się do innych jej rodzajów, np. interpolacji logarytmicznej, kwadratowej czy sześciennej[36].

Druga grupa metod w zakresie estymacji krzywej dochodowości polega na poszukiwaniu odpowiednio dobranej postaci funkcji dyskontowej d(t), która może znaleźć zastosowanie w równaniu krzywej dochodowości. Sposobem na uzyskanie obrazu czasowej struktury stóp procentowych jest zastosowanie funkcji sklejanych. Metoda ta polega na podzieleniu krzywej rentowności na kilka segmentów i dobraniu dla nich odrębnych form funkcyjnych, które najlepiej aproksymują ją w przyjętych przedziałach, takich, że ich pierwsze pochodne liczone w ustalonych węzłach zachowują tożsamość[37].

Przykładem tej metody estymacji krzywej dochodowości jest model łączonych wielomianów, którego twórcą jest J. H. McCulloch[38]. Postać krzywej dochodowości w poszczególnych przedziałach czasowych tworzą tu wielomiany połączone ze sobą kombinacją liniową:

$$d(t) = 1 + \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(t), \qquad (12)$$

gdzie:
$f_j(t)$ – j-ty wielomian;
a_j – parametr j-tego wielomianu.

Krzywa dochodowości estymowana w ten sposób wykazuje się bardzo dobrym dopasowaniem postaci funkcyjnej do obserwowanych rentowności instrumentów finansowych, jednak należy stwierdzić, że prowadzi to do zbyt dużej elastyczności tej krzywej, co oznacza oscylacje wokół prawdziwej funkcji dyskontującej i automatyczne zniekształcenie obrazu krzywej dochodowości wyznaczonej tą metodą.

Problem ten został częściowo rozwiązany w kolejnych rozwinięciach modelu proponowanych przez M. Fishera, D. Nychka i D. Zervosa[39], wprowadzających ograniczenie elastyczności, oraz D.F. Waggonera[40], który dopuszcza przyjmowanie przez krzywą dochodowości różnych rozmiarów elastyczności w jej poszczególnych segmentach. Krzywa rentowności tworzona ta drogą posiada większą elastyczność w przedziałach czasowych zapadalności krótkoterminowych instrumentów finan-

---

[36] Rodzaje przybliżeń, którymi można się posłużyć, wykorzystując interpolację na podstawie standardowych stóp zerokuponowych oraz odpowiadające im wartości czynników dyskontowych, obliczanych na bazie różnych rodzajów kapitalizacji oraz wynikające z ich zastosowań implikacje, omówione są w artykułach: W. Waluś, *Nota o interpolacji czynników dyskontowych*, „Rynek Terminowy„ 2001, nr 1, s. 118–122; W. Waluś, *Duration i wypukłość w przypadku niepłaskiej struktury stóp procentowych op.cit*., s. 100–107.

[37] Problematyka estymacji struktury terminowej stop procentowych w warunkach rynku polskiego podejmowana była w następujących pracach: E. Gurazdowski, *Wykorzystanie modelu zmiennej sztywności krzywej stóp terminowych do przybliżania krzywej rynku pieniężnego*, „Bank i Kredyt" 2003, nr 2, s. 87–92; P. Kliber, *Estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce*, „Bank i Kredyt" 2009, nr 1, s. 109–126; M. Marciniak, *Yield Curve Estimation at the National Bank of Poland*, „Bank i Kredyt" 2006, nr 10, s. 52–74; M. Stamirowski, *Jednoczynnnikowe modele Vasička oraz CIR – analiza empiryczna na podstawie danych z polskiego rynku obligacji skarbowych*, „Bank i Kredyt" 2003, nr 7, s. 35–46; M. Stamirowski, *The Polish Term Structure Versus Its Core Market Counterparts – A Comparative Analysis*, [w:] W. Milo, G. Szafrański (red.), *Financial Markets.Principles of Model ling, Forecasting and Decision-Making*, Łódź University Press, Łódź 2007; M. Świętoń, *Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998–2001*, „Materiały i Studia", Zeszyt nr 150, NBP, Warszawa 2002; I. Stępniak, J. Zieliński, *Estymacja i interpretacja zerokuponowej krzywej dochodowości*, „Materiały i Studia", Zeszyt nr 108, NBP, Warszawa 2000; U. Ziarki-Siwek, *Czasowa struktura stóp procentowych w świetle wybranych teorii ekonomicznych*, „Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny" 2003, nr 2, s. 145–162.

[38] Zob. J.H. McCulloch, *Measuring the Term Structure of Interest Rates*, „Journal of Business" 1971, nr 8, s. 811–830.

[39] Zob. M. Fisher, D. Nychka, D. Zervos, *Fitting the Term Structure of Interest Rate with Smoothing Splines*, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board, Washington 1995.

[40] Zob. D.F. Waggoner, *Spline Method for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*, Federal Reserve Bank of Atlanta, Atlanta 1997.

sowych, co umożliwia dobre jej dopasowanie do danych empirycznych w tych sektorach, a mniejszą elastyczność w przedziałach czasowych zapadalności instrumentów długoterminowych, dzięki czemu osiąga się stabilność estymowanych wielkości.

Metoda łączonych wielomianów pozwala na otrzymanie bardzo dokładnego przybliżenia krzywej dochodowości, utrudnieniem, które ogranicza jej stosowanie, są problemy z ustaleniem liczby oraz położenia punktów węzłowych.

Inne podejście do estymacji krzywej czasowej struktury stóp procentowych, polegające na wykorzystaniu chwilowej krzywej forwardowej, reprezentują Ch.R. Nelson i F. Siegel[41]. Posiada ono tę przewagę nad poprzednimi metodami, że szacowanej funkcji nadaje się własności asymptotyczne, co skutkuje możliwościami jej ekstrapolacji. Związek chwilowej krzywej forwardowej z krzywą dochodowości można przedstawić za pomocą równania:

$$\mathrm{y(t)} = \frac{1}{t}\int_0^t f(t)dt, \tag{13}$$

gdzie:
f(t) – chwilowa stopa procentowa;
t – lata do zapadalności instrumentu finansowego.

Wstawiając za f(t) funkcję chwilowej forwardowej, otrzymujemy postać krzywej dochodowości[42]:

$$y(t) = \beta_0 + \frac{(\beta_1+\beta_2)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}{\frac{t}{\tau}} - \beta_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{14}$$

gdzie:
β_0, β_1, β_2, τ – parametry estymowanej krzywej.

Powyższe wzory opisują postać funkcyjną krzywej dochodowości, zakładając wykorzystanie kapitalizacji ciągłej. Aby przejść od nich do obrazu czasowej struktury stóp procentowych o kapitalizacji dyskretnej, należy dokonać przekształcenia zgonie z zapisem[43]:

$$\hat{y} = \exp(y) - 1, \tag{15}$$

gdzie:
$\hat{y}$ – stopa przy kapitalizacji ciągłej.

Kształt krzywej dochodowości tworzonej według propozycji Ch.R. Nelsona i F. Siegela określają trzy estymowane parametry: $\beta_2 \cdot (\frac{t}{\tau}) \cdot (e^{-\frac{t}{\tau}})$ – jest determinantą krzywej dochodowości

[41] Zob. F. Siegel, Ch. R. Nelson, *Long-Term Behavior of Yield Curves*, „Journal of Financial and Qualitative Analysis" 1998, nr 1, s. 80–83.

[42] Postać funkcyjna krzywej dochodowości powstaje w wyniku wstawienia do jej równania zapisu określającego chwilową krzywą forwardową i przeprowadzenia odpowiednich przekształceń upraszczających. Sama chwilowa krzywa forwardowa ma postać równania:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \beta_2 \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right) \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

[43] I. Stępniak, J. Zieliński, *Estymacja i interpretacja zerokuponowej krzywej dochodowości*, „Materiały i Studia", Zeszyt nr 108, NBP, Warszawa 2000, s. 10.

w krótkim przedziale czasu, $\beta_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ określa jej położenie i kształt w średnim przedziale czasowym zapadalności instrumentów finansowych, natomiast β_0 determinuje obraz krzywej dochodowości w jej „krótkim" końcu[44]. Dodatkowymi własnościami modelu są asymptoty funkcji opisującej krzywą dochodowości:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \beta_0$$

$$\lim_{t \to 0} y(t) = \beta_0 + \beta_1 .$$

Oznacza to, że stopa procentowa instrumentu o bardzo długim terminie zapadalności ($m \to \infty$) dąży do wartości określanej przez parametr β_0, natomiast w bardzo krótkim okresie czasu ($m \to 0$) jest to wartość $\beta_0 + \beta_1$. Za wielkość tę często przyjmuje się stopę procentową kontraktu O/N.

Jeżeli graficznym obrazem struktury terminowej stóp procentowych jest prosta o nachyleniu dodatnim lub ujemnym, to zastosowanie tej metody szacowania krzywej dochodowości pozwala na osiągnięcie poprawnego odzwierciedlenia procesów zachodzących na rynkach finansowych, natomiast w przypadku bardziej złożonego kształtu struktury terminowej stóp procentowych zbyt niska elastyczność tego modelu uniemożliwia otrzymanie prawidłowych wyników. Jednak łatwość estymacji, możliwość prostej interpretacji ekonomicznej oraz ekstrapolacji na terminy zapadalności nieobserwowalne na danym rynku przyczyniły się do upowszechnienia modelu Nelsona i Siegela, który stanowi jedną z najczęściej wykorzystywanych przez banki centralne metod estymacji krzywych dochodowości[45].

W latach 1994–1995 L. Svensson najpierw sam, a następnie w 1996 r. wspólnie z M. Dahlquistem, zaproponował następujące rozwinięcie modelu Nelsona i Siegela, mające na celu poprawę elastyczności otrzymanej funkcji[46]:

$$y(t) = \beta_0 + \frac{(\beta_1 + \beta_2)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}})}{\frac{t}{\tau_1}} - \beta_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_3 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) \tag{16}$$

Krzywa dochodowości otrzymana ta drogą posiada takie same możliwości ekstrapolacyjne jak metoda Nelsona i Siegela, dodatkowo elastyczność funkcji estymowanej w ten sposób jest większa w porównaniu z modelem oryginalnym, co jest bardzo przydatne w przypadku wystąpienia stosunkowej złożoności struktury terminowej stóp procentowych[47]. Wszystkie opisane powyżej sposoby estymacji krzywej dochodowości posiadają swoje wady i zalety; zostały one porównane i zestawione ze sobą w tab. 2.

---

[44] M. Stamirowski, *Empirical Application of the „Nelson and Siegal" Parsimonious Zero-Coupon Yield Curve Model*, „Materiały i Studia", Zeszyt nr 16, NBP, Warszawa 1999, s. 7.
[45] Por. I. Stępniak, J. Zieliński, *op.cit*., s. 11.
[46] Zob. L.E.O. Svensson, *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994*, National Bureau of Economic Research, Cambridge 1994, L.E.O. Svensson, *Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method*, „Quarterly Review" 1995, nr 3, s. 30–35 oraz M. Dahlquist, L.E.O. Svensson, *Estimating the Term Structure of Interest Rates for Monetary Policy Analysis*, „Scandinavian Journal of Economics" 1996, nr 1, s. 21–35.
[47] Chwilowa krzywa forwardowa w ujęciu Svenssona wyrażona jest równaniem:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_2 \cdot \frac{t}{\tau_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_3 \cdot \frac{t}{\tau_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} .$$

Tab. 2. Porównanie podstawowych metod estymacji terminowej struktury stóp procentowych

Kryterium porównawcze	Model łączonych wielomianów	Model Nelsona-Siegela	Model Svenssona
Podstawy teoretyczne	nie	tak	tak
Problemy z estymacją	małe, estymacja na podstawie regresji liniowej	duże, zastosowanie nieliniowej metody najmniejszych kwadratów	b. duże, zastosowanie nieliniowej metody najmniejszych kwadratów, więcej parametrów do oszacowania niż w metodzie Nelsona-Siegela
Dopasowanie do danych obserwowanych w praktyce	mogą występować znaczne rozbieżności	dość duże	duże

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: P. Kliber, Estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce, „Bank i Kredyt" 2009, nr 1, s. 118–119.

Oprócz cech wymienionych w tej tabeli warto również wspomnieć o dwóch innych wadach odnoszących się do każdej z tych metod. Po pierwsze, metody te charakteryzują się tzw. niespójnością czasową. Chodzi o to, że jeżeli struktura terminowa stóp procentowych w momencie t jest opisywana np. przez model Nelsona-Siegla, a dynamika stóp procentowych dana jest modelem HJM, to rozwiązanie w dowolnym momencie s > t nie ma już postaci funkcji Nelsona-Segla. Rzecz ta dotyczy również dwóch pozostałych modeli. Druga wada wiąże się problemami praktycznymi napotykanymi przy estymacji krzywej. Wymaga ona bowiem często wprowadzenia dodatkowej zmienności i w efekcie zmienność estymowanej stopy procentowej dla danego okresu jest wyższa niż zmienność stopy otrzymanej w inny sposób, np. metoda *bootsrapingu*. Jeżeli uzyskana krzywa będzie nam służyć do oceny ryzyka czy wyceny jakiś instrumentów, to mogą pojawić się tu błędy[48].

Jako że estymacja krzywej dochodowości, przeprowadzona w oparciu o te same dane, ale wykorzystująca odmienne metody, może prowadzić do powstawania różnic w wyniku, stąd dla jej uwiarygodnienia wskazane jest wykorzystanie kilku modeli, a następnie porównanie ich rezultatów. Podstawową miarą pozwalającą ocenić dopasowanie krzywych do danych empirycznych jest wskaźnik RMSE:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(P_t - Pi)^2}{n}}\,, \qquad (17)$$

gdzie:
P_t – ceny teoretyczne;
P_i – ceny obserwowane;
n – liczba obserwacji.

Kryterium optymalizacyjnym jest więc wielkość zdefiniowana jako pierwiastek z sumy kwadratów błędów, czyli różnic między wartością zadaną (wzorcową) a wartością otrzymaną na wyjściu w przeliczeniu na jednostkę obserwacji. Ponieważ estymowana krzywa powinna przebiegać maksymalnie blisko obserwacji rzeczywistych, poszukuje się takiego modelu, dla którego błąd mierzony RMSE jest jak najniższy.

[48] P. Kliber, *op. cit.*, s. 118–119.

Zakończenie

Przeprowadzone rozważania wykazały, iż zagadnienie struktury terminowej stóp procentowych jest zasadniczym problemem o charakterze teoretycznym i praktycznym. Przedstawione teorie terminowej struktury stóp procentowych pozwalają na zidentyfikowanie i zrozumienie czynników ją kształtujących. W każdej z omawianych teorii owe determinanty zostają przedstawione w nieco inny sposób, a poznanie i porównanie ich ze sobą pozwala uzyskać pełniejszy obraz wzajemnych zależności. Z kolei opisane modele estymacji krzywej dochodowości pozwalają bezpośrednio na jej konstruowanie.

Efektywne rozpoznanie krzywej dochodowości ma fundamentalne znaczenie w sferze ekonomii i finansów. W strukturze terminowej stóp procentowych zawarte są bowiem informacje o oczekiwaniach inflacyjnych, a krzywa dochodowości jest wykorzystywana przez bank centralny do kontrolowania poziomu inflacji. Stawki procentowe ją tworzące stanowią również istotne parametry przy zarządzaniu długiem publicznym. Ponadto znajomość terminowej struktury stóp procentowych stanowi klucz do sukcesu w procesie wyceny instrumentów finansowych oraz zarządzania ryzykiem finansowych, a w szczególności ryzykiem stopy procentowej.

Literatura

Bohm-Bawerk E.V., *The Positive Theory of Capital*, G.E. Schwert & Co., London 1891.
Campbell J., Lo A., Mackinlay A., *Econometricof Financial Markets*, Princeton, 1997.
Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A., *A Re-Examination of Traditional Hypothesis about the Term Structure of Interest Rates*, „The Journal of Finance" 1981, September.
Culbertson J.M., *The Term Structure of Interest Rates*, „Quarterly Journal of Economics" 1957, nr 71.
Dacewicz T., Radkowska E., *Terminowa struktura stóp procentowych*, „Nasz Rynek Kapitałowy" 1999, nr 8.
Dahlquist M., Svensson L.E.O., *Estimating the Term Structure of Interest Rates for Monetary Policy Analysis*, „Scandinavian Journal of Economics" 1996, nr 1.
Elton J., Gruber M.J., *Nowoczesna teoria portfelowa i analizy papierów wartościowych*, WIG Press, Warszawa 1998.
Fabozzi F.J., *Bond Markets, Analysis and Strategies*, Prentice Hall, 2010.
Fedorowicz Z., *Funkcjonowanie i zadania bankowości w procesie przebudowy systemu gospodarczego*, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 1992.
Fisher I., *The Theory of Interest*, MacMillan, London 1930.
Fisher M., Nychka D., Zervos D., *Fitting the Term Structure of Interest Rate with Smoothing Splines*, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board, Washington 1995.
Grąt A., *Ryzyko stopy procentowej i instrumenty służące zabezpieczaniu się przed nim*, „Materiały i Studia", Zeszyt nr 85, NBP, Warszawa 1999.
Gurazdowski E., *Wykorzystanie modelu zmiennej sztywności krzywej stóp terminowych do przybliżania krzywej rynku pieniężnego*, „Bank i Kredyt" 2003, nr 2.
Hicks J.R., *Value and Capital*, Oxford University Press, London 1953.
Homer S., Johannesen R.L., *The Price of Money,1946 to 1969*, Rutgers University Press, Rutgers 1969.
Jackowicz K., *Zarządzanie ryzykiem stopy procentowej. Metoda duracji*, PWN, Warszawa 1999.
Kane E.J., Malkiel B.G., *The Term Structure of Interest Rates: An Analysis of a Survey of Interest-Rate Expectations*, „Review of Economics and Statistics" 1967, August.
Kane E.J., *The Term Structure of Interest Rates: An Attempt to Reconcile Teaching with Practice*, „Journal of Finance" 1970, May.
Kliber P., *Estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce*, „Bank i Kredyt" 2009, nr 1.
Kessel R.A., *The Cyclical Behavior of the Term Structure of Interest Rates*, NBER Working Paper, nr 91, Cambridge 1965.
Livingston M., *Bonds and Bond Derivatives*, Blackwell Publishing, Boston 2005.
Lutz F.A., *The Structure of Interest Rates*, „Quarterly Journal of Economics" 1940, nr 55.
Macaulay F.R., *Some Theoretical Problems Suggested by Movements of Interest Rates*, *Bond Yields and Stock Prices in the United States*, NBER, New York 1938.
Maddala G., Rao C., *Handbook of Statistics Statistical Methods in Finance*, Elsevier, 1996.

Malkiel B.G., *The Term Structure of Interest Rates: Expectations and Behavior Patterns*, Princeton University Press, Princeton 1966.
Marciniak M., *Yield Curve Estimation at the National Bank of Poland*, „Bank i Kredyt" 2006, nr 10.
McCulloch J.H., *Measuring the Term Structure of Interest Rates*, „Journal of Business" 1971, nr 8.
Meiselman D., *The Term Structure of Interest Rates*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1962.
Mishkin F.S., *Yield Curve*, NBER Working Paper, 3550, MA, Cambridge 1990.
Modigliani F., Sutch R., *Innovations in Interest-Rate Policy*, „American Economic Review" 1966, May.
Patterson K., *An Introduction to Applied Econometrics*, Palgrave, 2000.
Say J.B., *A Treatise on Political Economy*, Lippincott Grambo & Co., Philadelphia 1855.
Semmler W., *Asset Prices Booms and Recessions*, Springer, 2004.
Sidgwick, H., *The Principles of Political Economy*, MacMillian, London 1887.
Siegel F., Ch. R. Nelson, *Long-Term Behavior of Yield Curves*, „Journal of Financial and Qualitative Analysis" 1998, nr 1.
Sinkey J. F, *Commercial Bank Financial Management in the Financial-Services Industry*, Macmillan Publishing Company, New York 1992.
Stamirowski M., *Empirical Application of the „Nelson and Siegal" Parsimonious Zero-Coupon Yield Curve Model*, "Materiały i Studia", Zeszyt nr 16, NBP, Warszawa 1999.
Stamirowski M., *Jednoczynnnikowe modele Vasička oraz CIR – analiza empiryczna na podstawie danych z polskiego rynku obligacji skarbowych*, „Bank i Kredyt" 2003, nr 7.
Stamirowski M., *The Polish Term Structure Versus Its Core Market Counterparts – A Comparative Analysis*, [w:] W. Milo, G. Szafrański (red.), *Financial Markets.Principles of Model ling*, *Forecasting and Decision-Making*, Łódź University Press, Łódź 2007.
Stępniak I., Zieliński J., *Estymacja i interpretacja zerokuponowej krzywej dochodowośc*, „Materiały i Studia", Zeszyt nr 108, NBP, Warszawa 2000.
Svensson L.E.O., *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994*, National Bureau of Economic Research, Cambridge 1994.
Svensson L.E.O., *Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method*, „Quarterly Review" 1995, nr 3.
Świętoń M., *Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998-2001*, „Materiały i Studia", Zeszyt nr 150, NBP, Warszawa 2002.
Tobin J., *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*, „Review of Economic Studies" 1958, nr 76.
Van Horne J., *Financial Market Rates and Flow*, Prentice Hall, 2001.
Waggoner D.F., *Spline Method for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*, Federal Reserve Bank of Atlanta, Atlanta 1997.
Waluś W., *Duration i wypukłość w przypadku niepłaskiej struktury stóp procentowych*, „Rynek Terminowy" 2001, nr 4.
Waluś W., *Nota o interpolacji czynników dyskontowych*, „Rynek Terminowy" 2001, nr 1.
Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.
Ziarko-Siwek U., *Czasowa struktura stóp procentowych w świetle wybranych teorii ekonomicznych*, „Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny" 2003, nr 2.